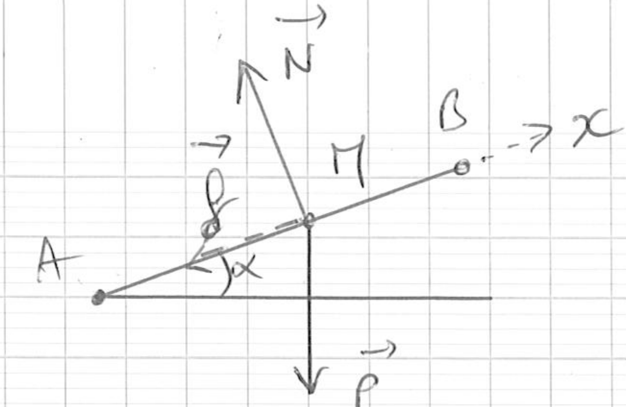
I) 1)



Mouvement rectiligne

2) $W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N} \perp \vec{v}$

$W(\vec{P}) = -\Delta E_p = \underbrace{-mgh_B}_{<0}$ (travail résistant).

3) $\frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2 = -mgh_B$

$(v_B = 0)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 = \cancel{m} g h_B$

$\Rightarrow h_B = \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g}$

III) On ajoute la force de frottement $\vec{f}$ au bilan.

$W(\vec{N}) = 0$

$W(\vec{P}) = -mgh_B$ (Travail résistant)

$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r}$ (Travail résistant)

$= \int_A^B \vec{f} \cdot \vec{v}\, dt$

$= \int_A^B -\alpha v_x \cancel{\vec{u}_x} \cdot v_x \cancel{\vec{u}_x} \cdot dt$

$= -\alpha \int_A^B v_x^2 \cdot dt$

$= -\alpha \int_0^{t_B} v_A^2 \exp^2\left(-\frac{t}{\tau}\right)^2 dt$

$= -\alpha v_A^2 \int_0^{t_B} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt$

$= -\alpha v_A^2 \exp\left(-\frac{2t_B}{\tau}\right) < 0$

t_B ?

PFD : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur x :

$$-mg\sin\alpha + 0 - \alpha v = m\frac{dv}{dt}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g\sin\alpha$$

SEH = SG : $v(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

CI : $v(0) = v_A$

$\Rightarrow v_A = A$

$$v(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$\Rightarrow v(t) = v_A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

$\Rightarrow$ la balle ne s'arrête jamais !

II) On ajoute la force de frottement $\vec{f}$ au bilan :

$W(\vec{N}) = 0.$

$W(\vec{P}) = -mgh_B$

$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}\cdot\vec{d\Omega} = \int_A^B \vec{f}\cdot\vec{v}\, dt$

$= \int_A^B -f\,\cancel{\vec{u_x}}\cdot v_x\,\cancel{\vec{u_x}}\, dt$

(*) (Beaucoup plus simple) Voir ci-après

$= -f\int_0^{t_B} v\, dt$ → Il nous faut l'expression de $v(t)$ et l'expression de t_B.

Expression de v ?

PFD : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur x :

$$-mg\sin\alpha + 0 - f = m\frac{dv}{dt}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m} - g\sin\alpha$$

$\Leftrightarrow$

$$v = \left(-\frac{f}{m} - g\sin\alpha\right)t + B$$

CI :

$$v(0) = v_A \Rightarrow v_A = B$$

$$\underline{v = \left(-\frac{f}{m} - g\sin\alpha\right)t + v_A}$$: On a l'expression $v(t)$

On intègre de nouveau :

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{f}{m} - g\sin\alpha\right)t^2 + v_A t + C$$

CI :

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}\left(-\frac{f}{m} - g\sin\alpha\right)t^2 + v_A t}$$

On détermine t_B :

$$L = \frac{1}{2}\left(-\frac{f}{m} - g\sin\alpha\right)t_B^2 + v_A t_B.$$

Équation du second degré en t_B.

$\Rightarrow$ On détermine t_B.

(*) Il y a plus simple !

$$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -f\,\cancel{\vec{u}_x}\cdot dx\,\cancel{\vec{u}_x}$$

$$= -f\int_{x_A}^{x_B} dx = -f(x_B - x_A)$$

$$= -fL \quad (<0)$$

$$= -f\frac{h_B}{\sin\alpha}$$

Th. énergie cinétique

$$\cancel{\frac{1}{2} m v_B^2} - \frac{1}{2} m v_A^2 = \overset{W_{AB}(\vec{P})}{-mgh_B} - \overset{W_{AB}(\vec{f})}{f \frac{h_B}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = h_B \left(mg + \frac{f}{\sin\alpha} \right)$$

d'où :

$$h_B = \frac{\frac{1}{2} m v_A^2}{mg + \frac{f}{\sin\alpha}}$$

Non demandé

III) $$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{M} = \int_A^B -\alpha v \vec{u}_x \cdot dx\, \vec{u}_x$$

$$= -\alpha \int_A^B v \, dx = -\alpha \int_A^B v . v . dt$$

$$= -\alpha \int_A^B v^2 . dt$$

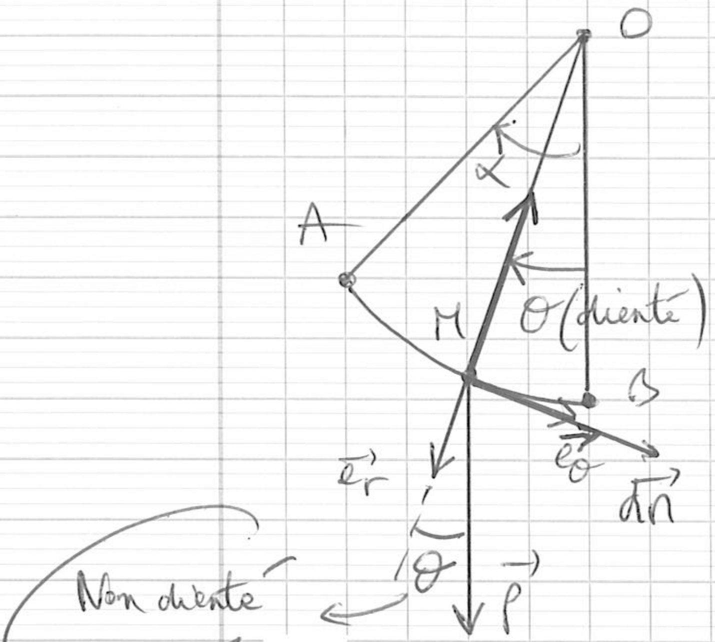
$$= -\alpha \int_A^B \left(v_A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)^2 dt$$

$$= -\alpha \int_A^B v_A^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) . dt$$

$$= -\alpha v_A^2 \times \left[\left(-\frac{\tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right]_{t_A}^{t_B}$$

Pb : t_B inconnu

Mouvement circulaire



$\alpha = 45°$ $\quad \theta < 0$

Masse m.

Vitesse nulle en A.

Déterminer l'expression de v_B en appliquant le théorème de l'E_C.

$$E_{C_B} - E_{C_A} = \Sigma W(\vec{F}) = W(\vec{N}) + W(\vec{P})$$
$$= 0 + mg(h_A - h_B)$$
$$= mg\underbrace{(h_A - h_B)}_{>0} \text{ (moteur)}$$

$E_{C_A} = 0$

$E_{C_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$

D'où

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \cancel{m} g (h_A - h_B)$$

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

Non demandé.

Recalcul de $W(\vec{P})$ par la méthode intégrale :

$$W(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot \vec{dr}$$

Avec : $\vec{dr} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

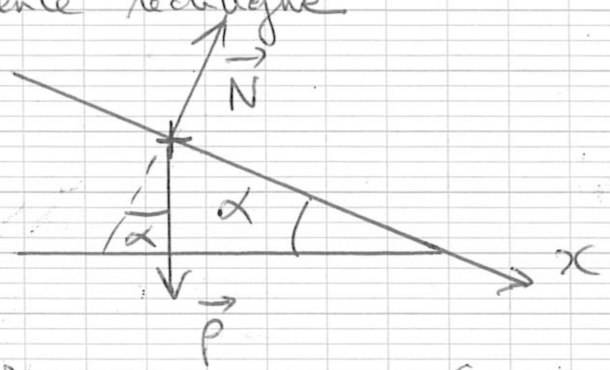
Et : $\vec{P} \cdot \vec{dr} = mgR\,d\theta \sin(-\theta)$

$$W(\vec{P}) = -\int_\alpha^0 mgR \sin\theta\, d\theta = mgR\left[+\cos\theta\right]_\alpha^0$$
$$= mgR\left[1 - \cos\alpha\right] = mg(h_A - h_B)$$

Exercice Saut à ski

A) Descente rectiligne

1)



2) $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$

Projection sur l'axe x :

$$\cancel{m} g \sin\alpha = \cancel{m} a_x$$

$$a_x = g\sin\alpha$$

On intègre : $v_x(t) = g\sin\alpha\, t + cte\,1$

En prenant $v_A = 0$:

Condition initiale : $v_x(0) = 0$

d'où : $cte\,1 = 0$

$$v_x(t) = g\sin\alpha\, t$$

On intègre de nouveau :

$$x(t) = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2 + cte\,2$$

En prenant : $x_A = 0$

$$x(0) = cte\,2 = 0$$

On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= g\sin\alpha \\ v_x(t) &= g\sin\alpha\, t \\ x(t) &= \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2 \end{aligned}}$$

Mouvement uniformément accéléré

En B : $x(t_B) = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t_B^2 = L$

$$t_B^2 = \frac{2L}{g\sin\alpha}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}}$$

D'où : $v_B(t_B) = v_{x_B}(t_B)$

$$= g\sin\alpha \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}} = \sqrt{2g\sin\alpha L}$$

$$v_B = \sqrt{2\times10\times\sin35°\times60} = 26\ m.s^{-1}$$

3) Th de l'E_C entre A et B :

$$\Delta E_C = \Sigma W_{AB}(\vec{F})$$

$$E_{C_B} - \cancel{E_{C_A}} = \Sigma W_{AB}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{P})$$

$$= \vec{P}\,.\,\vec{AB}$$

$$E_{C_B} = mgL\sin\alpha$$

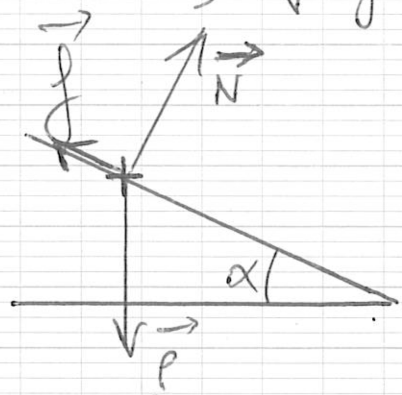
d'où :

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 = \cancel{m}gL\sin\alpha$$

$$v_B^2 = 2gL\sin\alpha$$

$$v_B = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

Beaucoup ⊕ rapide !

4) 

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Projection sur l'axe x :

$$mg\sin\alpha - \alpha v_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

Forme canonique :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_x = g\sin\alpha$$

Constante de temps : $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$ / Second membre : $g\sin\alpha$

Non demandé

SESSM : $v_{x_1}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $v_{x_2}(t) = \frac{m}{\alpha} g \sin\alpha$

SG : $v_x(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{m}{\alpha} g \sin\alpha$

CI : A $t = 0$, $v_x(t) = 0$

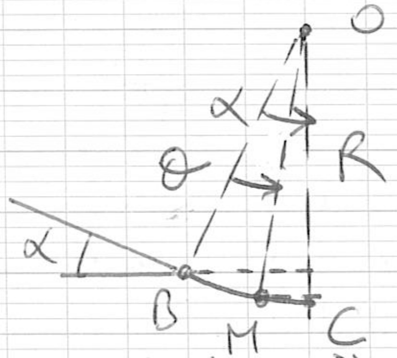
$\Rightarrow K = -\frac{mg}{\alpha} \sin\alpha$

Solution : $\boxed{v_x(t) = \frac{mg}{\alpha} \sin\alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

B) Mouvement circulaire entre les points B et C

1)



$= -\Delta E_{pp} = -mg(h_M - h_B)$

$$\Delta E_c = \Sigma W_{BM}(\vec{F}) = W_{BM}(\vec{P}) = mg(h_B - h_M) > 0$$

(le travail du poids est moteur).

Or : $h_B = R(1 - \cos\alpha)$ en prenant $h_C = 0$

$h_M = R(1 - \cos(\alpha - \theta))$

D'où :

(*) Voir page 6

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_M^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \cancel{m} g R \left(\cancel{1} - \cos\alpha - \cancel{1} + \cos(\alpha - \theta)\right)$$

$$v_M^2 - v_B^2 = 2gR\left(\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha\right)$$

$$v_M^2 = v_B^2 + 2gR\left(\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha\right)$$

$$v_M = \sqrt{v_B^2 + 2gR\left(\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha\right)}$$

En C : $\theta = \alpha$

$$v_C = \sqrt{26^2 + 2\times 10\times 10\times(\cos 0 - \cos 35°)}$$
$$= 26{,}7\ m.s^{-1}$$

Non demandé

2)

$\vec{OM} = R\vec{u_r}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}\right) = R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

Non demandé

3) $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Projection sur $\vec{u_\theta}$

$$\cancel{m}g\sin(\alpha - \theta) = \cancel{m}R\ddot{\theta}$$

Approximation des petits angles :

$$\sin(\alpha - \theta) \simeq \alpha - \theta.$$

d'où :

$$g(\alpha - \theta) = R\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = \frac{g}{R}\alpha} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

4) SP : $\theta_p = \alpha$

Solution générale :

$$\theta(t') = A\cos(\omega_0 t') + B\sin(\omega_0 t') + \alpha$$
$$\dot{\theta}(t') = -A\omega_0\sin(\omega_0 t') + B\omega_0\cos(\omega_0 t')$$
$$\ddot{\theta}(t') = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t') - B\omega_0^2\sin(\omega_0 t')$$

Non demandé

CI : $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dfrac{v_B}{R} \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} A + \alpha = 0 & \Rightarrow A = -\alpha \\ B\omega_0 = \dfrac{v_B}{R} & \Rightarrow B = \dfrac{v_B}{R\omega_0} \end{cases}$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \theta(t') = -\alpha\cos(\omega_0 t') + \dfrac{v_B}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t') + \alpha \\ \dot{\theta}(t') = +\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t') + \dfrac{v_B}{R}\cos(\omega_0 t') \\ \ddot{\theta}(t') = +\alpha\omega_0^2\cos(\omega_0 t') - \dfrac{v_B\omega_0}{R}\sin(\omega_0 t') \end{cases}$$

5) On reprend les expressions de 2) :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{v} = R\left(\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t') + \frac{v_B}{R}\cos(\omega_0 t')\right)\vec{u_\theta}$$

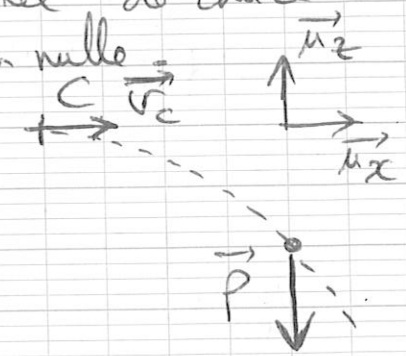
Non demandé

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$= -R\left(\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t') + \frac{v_B}{R}\sin(\omega_0 t')\right)^2\vec{u_r} + R\left(\alpha\omega_0^2\cos(\omega_0 t') - \frac{v_B\omega_0}{R}\sin(\omega_0 t')\right)\vec{u_\theta}$$

C) Mouvement après C.

Il s'agit du mouvement "traditionnel" de chute libre avec une vitesse initiale non nulle.



Bilan des forces :

$$\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$$

PFD :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$-\cancel{m}g\,\vec{u_z} = \cancel{m}\vec{a}$$

$$-g\,\vec{u_z} = \vec{a}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \underset{\text{Intégration}}{\Longrightarrow} \begin{cases} v_x = cte = v_C \\ v_z = -gt'' \end{cases}$$

En prenant $t'' = 0$ en C.

(Re-paramétrage)

Intégration

(Re-paramétrage) $\Rightarrow \begin{cases} x = v_C t'' & \text{en prenant } x_C = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t''^2 & \text{en prenant } z_C = 0 \end{cases}$

$$x = v_C t'' \Rightarrow t'' = \frac{x}{v_C}$$

$$z = -\frac{1}{2} g t''^2 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_C}\right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_C^2} x^2$$

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_C^2} x^2 \qquad \text{Eq. trajectoire}$$

Vérif. homogénéité : $[z] = \frac{[g]}{[v_C^2]} [x^2]$

$$= \frac{m \cdot \cancel{s^{-2}}}{m^{\cancel{2}} \cdot \cancel{s^{-2}}} m^{\cancel{2}} = m$$

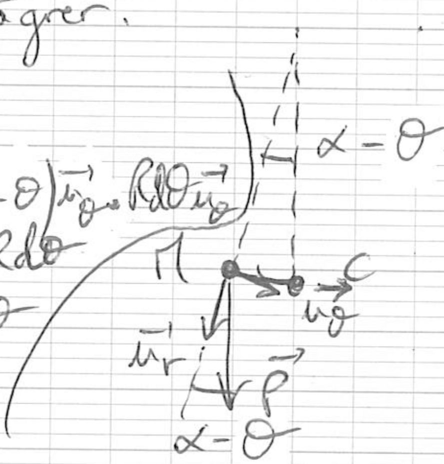
Non demandé | (*) Pour calculer $W_{BM}(\vec{P})$ sans passer par l'E_p il faut calculer le travail élémentaire $\delta W(\vec{P})$ puis intégrer.

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{M}$$

$$\delta W(\vec{P}) = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \theta)\right) \vec{u_\theta} \cdot R d\theta \vec{u_\theta}$$

$$= mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \theta)\right) R d\theta$$

$$= mg \sin(\alpha - \theta) R d\theta$$



$d\vec{M}$ déplacement élémentaire suivant $\vec{u_\theta}$:
$d\vec{M} = R d\theta \vec{u_\theta}$
$d\vec{M} = R d\theta \vec{u_\theta}$

D'où :

$$W_{BM}(\vec{P}) = \int_B^M mg \sin(\alpha - \theta) R d\theta$$

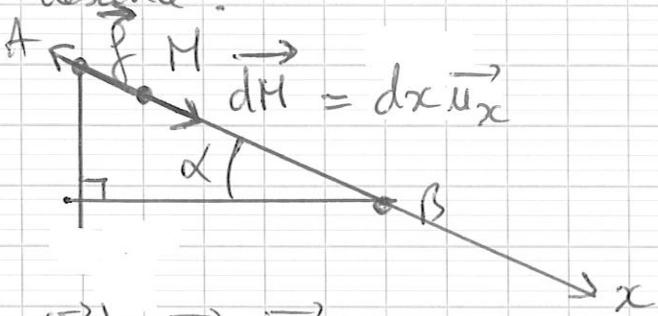
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\theta} mg \sin(\alpha - \theta) R d\theta$$

$$W_{BM}(\vec{P}) = \left[mg \cos(\alpha - \theta) R \right]_0^\theta$$

$$= mgR \left[\cos(\alpha - \theta) - \cos\alpha \right]$$

CQFD

(**) Calcul du travail de $\vec{f}$ (frottement) lors de la descente.



Non demandé

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\overrightarrow{dM}$$

$$= f\cdot dx$$

Avec $f = -\alpha v$ et $dx = v\,dt$

D'où :

$$\delta W(\vec{f}) = -\alpha v^2 dt$$

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_0^{t_B} -\alpha\left(\frac{mg}{\alpha}\sin\alpha\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)^2 dt.$$

$$= -\frac{m^2g^2}{\alpha}\sin^2\alpha\int_0^{t_B}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt.$$