M3 – SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Programme ATS

Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives. Étudier un système modélisé par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ; interprétation qualitative du temps caractéristique. Exploiter numériquement une interaction dissipative amenant à une équation différentielle linéaire ou non linéaire.

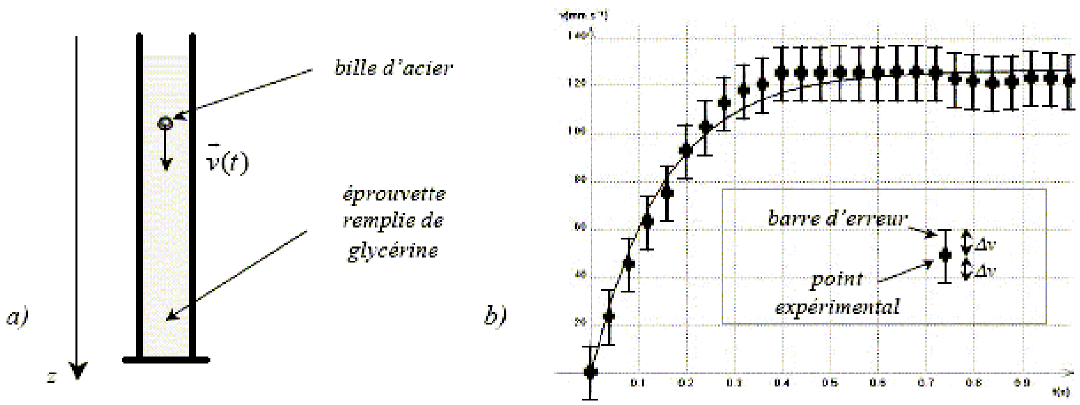
I) EXEMPLE en MECANIQUE : CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT FLUIDE

<u>I)1) Expérience</u>

Une bille est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide visqueux.

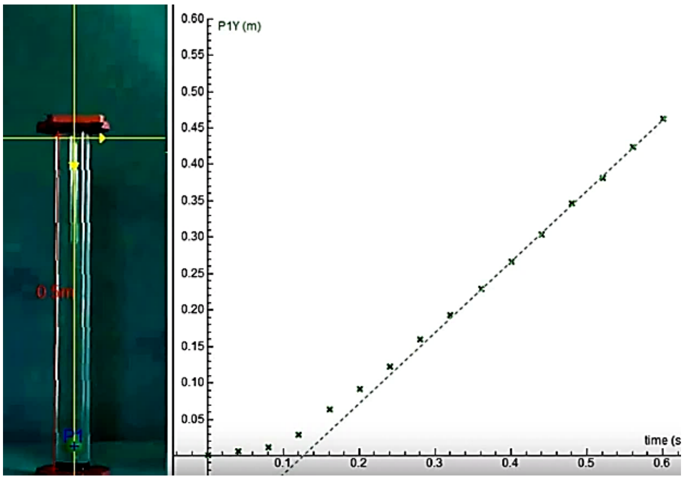
https://www.youtube.com/watch?v=wp3cptyuwGI

Enregistrement de la **vitesse en fonction du temps $\boldsymbol{v = f(t)}$:**



Observations :

- La bille accélère (sa vitesse v augmente) puis atteint une vitesse limite constante,
- Après un **régime transitoire** (v variable), le **régime permanent** peut être décrit par une vitesse $v = cte$ de la bille, qui correspond un Mouvement de type Rectiligne Uniforme (**MRU**),
- L'allure de $v = f(t)$ est de type **exponentiel** puis **constant** (sera mis en équation par la suite).



Enregistrement de la **position en fonction du temps $\boldsymbol{z = f(t)}$** :

On distingue de nouveau :

- Un **régime transitoire**, pendant lequel $z = f(t)$ est exponentiel,
- Un **régime permanent** de type MRU, pendant lequel $z = f(t)$ est linéaire.

I)2) Bilan des forces appliquées sur la bille

Schéma

Système :

Référentiel :

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (**BAME**) appliquées sur la bille :

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \overrightarrow{u_z}}$$

Remarque sur la poussée d'Archimède :

Poids : $\vec{P} = \rho_{solide} V g \overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \overrightarrow{u_z}$

⇨ **Poids apparent** : $\boldsymbol{\overrightarrow{P_a} = \vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a}} = (\rho_{solide} - \rho_{fluide}) V g \overrightarrow{u_z}$

- Si $\rho_{solide} > \rho_{fluide}$, alors $\overrightarrow{P_a}$ orienté vers le bas => le solide coule
- Si $\rho_{solide} < \rho_{fluide}$, alors $\overrightarrow{P_a}$ orienté vers le haut => le solide flotte

I)3) Equation différentielle de la vitesse de la bille

a) A partir du PFD, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; on négligera la poussée d'Archimède dans un premier temps.
b) A partir du Théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

II) GENERALISATION : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

II)1) Forme canonique des équations du 1er ordre à coefficients constants

Les équations du 1er ordre à coefficients constants se présentent sous la forme $\boxed{\boldsymbol{a\frac{dy(x)}{dx}+by(x)=g(x)}}$

avec a et b coefficients **constants** et $y(x)$ et $g(x)$ fonctions de x quelconques.

Forme canonique : s'obtient en ramenant à 1 le coefficient du terme de plus haut degré : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dy(x)}{dx}+\frac{b}{a}y(x)=\frac{1}{a}g(x)}}$

En physique, il s'agit usuellement d'équations différentielles par rapport à la variable de temps, soit

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{b}{a}y(t)=\frac{1}{a}g(t)}}$$

On définit une **constante de temps, ou un temps caractéristique** : $\tau=\frac{a}{b}$, soit une équation différentielle de forme canonique :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}y(t)=\frac{1}{\tau}h(t)}}$$

Par analyse dimensionnelle, on a bien $[\tau]=s$: τ est homogène à un temps.

Dans l'exemple précédent :

II)2) Résolution de l'équation différentielle

Dans le cas de la **bille qui chute dans un fluide**, avec frottement visqueux, l'équation différentielle obtenue est :

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\tau}v=g}$$

Il s'agit d'une **équation différentielle du 1er ordre linéaire à coefficients constants**, avec **second membre** constant.

5 étapes sont nécessaires :

a) Solution de l'équation différentielle homogène (SEH) :

Les solutions de l'équation différentielle homogène (SEH) $\boldsymbol{\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\tau}v=0}$ (équation différentielle sans second membre) sont de la forme :

b) **Solution particulière (SP)** de l'équation différentielle = une solution simple de l'équation différentielle, de même forme que le second membre.

c) **Solution générale (SG)** = somme de la solution de l'équation différentielle homogène (SEH) et de la solution particulière (SP).

Remarque : Il y une infinité de solutions mathématiques (autant que de valeurs de A), mais il y a une seule solution physique, qui est déterminée grâce aux conditions initiales.

d) **Condition(s) initiale(s)** (CI) : La connaissance de $v(0)$ ou bien $\frac{dv}{dt}(0)$ est nécessaire pour déterminer *la* **solution physique *unique***.

e) Détermination de la **constante d'intégration A** à partir des conditions initiales.

Remarque : Par intégration, on obtient l'équation de $\boldsymbol{z(t)}$:

II)3) Temps caractéristiques d'un régime transitoire

■ **Temps caractéristique pour un système du premier ordre**

Pour tout système du 1er ordre de forme canonique $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{y_0(t)}{\tau}$, la grandeur $\boldsymbol{\tau}$ est homogène à un **temps** et correspond au **temps caractéristique** du système.

Dans le cas de la **bille qui chute dans un fluide** :

1) Montrer que $v = \dot{z}$ tend vers une valeur limite $v_{lim} = \dot{z}_{lim} = g\tau = \frac{mg}{h}$, et exprimer en fonction de $\dot{z}_{lim}$: $\dot{z}(\tau), \dot{z}(3\tau)$ et $\dot{z}(5\tau)$.
2) Rechercher l'instant t_i tel que la tangente à l'origine à la courbe $v(t)$ atteigne la valeur v_{lim} (intersection de la tangente en zéro avec l'asymptote à la courbe). Tracer l'allure de la courbe.

Interprétation qualitative

Nous avons vu que **la tangente à l'origine** de la courbe $\dot{z}(t)$ **croise l'asymptote pour** $t = \tau$.
De plus, pour $t >> \tau$, $\dot{z}$ tend vers sa valeur limite constante, et l'accélération devient nulle.

- **Interprétation qualitative du temps caractéristique** τ (ou **temps de relaxation du système**) **:**

Grandeur indiquant **l'ordre de grandeur de la durée du phénomène transitoire,** ou encore **l'ordre de grandeur de la durée pour atteindre la valeur asymptotique (**c'est à dire le **régime permanent).**

Interprétation quantitative

- Après un temps τ, la vitesse de la bille atteint environ 63 % de sa valeur finale ;
- La vitesse atteint 99 % de sa valeur finale (ou ne diffère que de 1% de sa valeur finale) pour $t = \tau$.

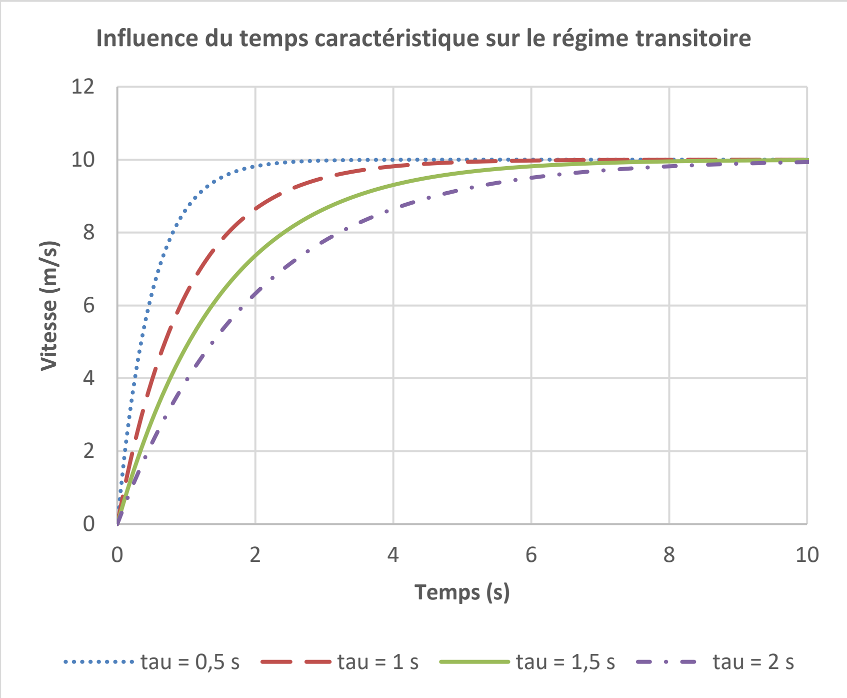
De façon générale, on appelle :

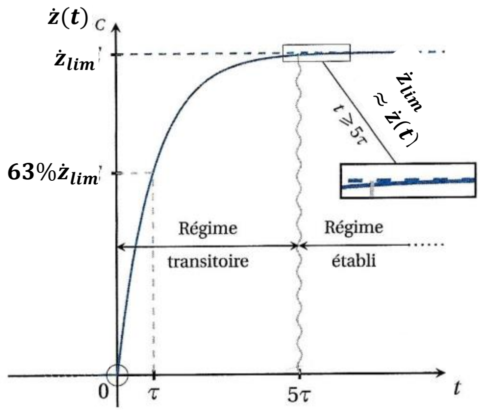
- **Temps de montée** (pour une **charge**) le temps nécessaire à la tension pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale (on trouve ici $\tau_M \approx 2{,}2\ \tau$).

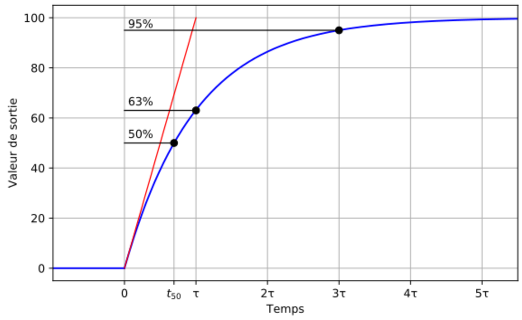
- **Temps de réponse à x%** la durée au bout de laquelle la tension étudiée ne diffère que de x% de sa valeur finale à l'équilibre (on trouve ici $t_{R\,5\%} \approx 3\tau$).

Après un temps de quelques τ, les grandeurs correspondent pratiquement à celles du régime permanent.

Allure des courbes



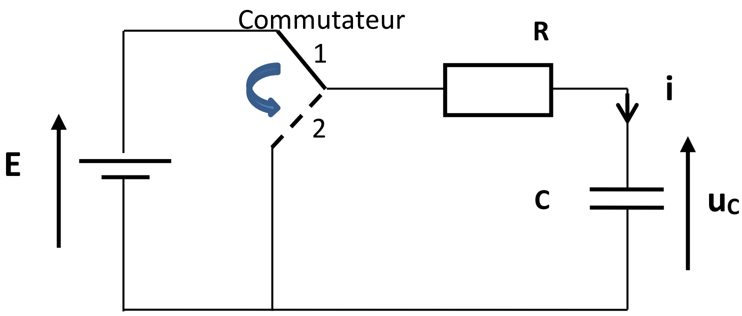




III) EXEMPLE en ELECTRICITE : CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

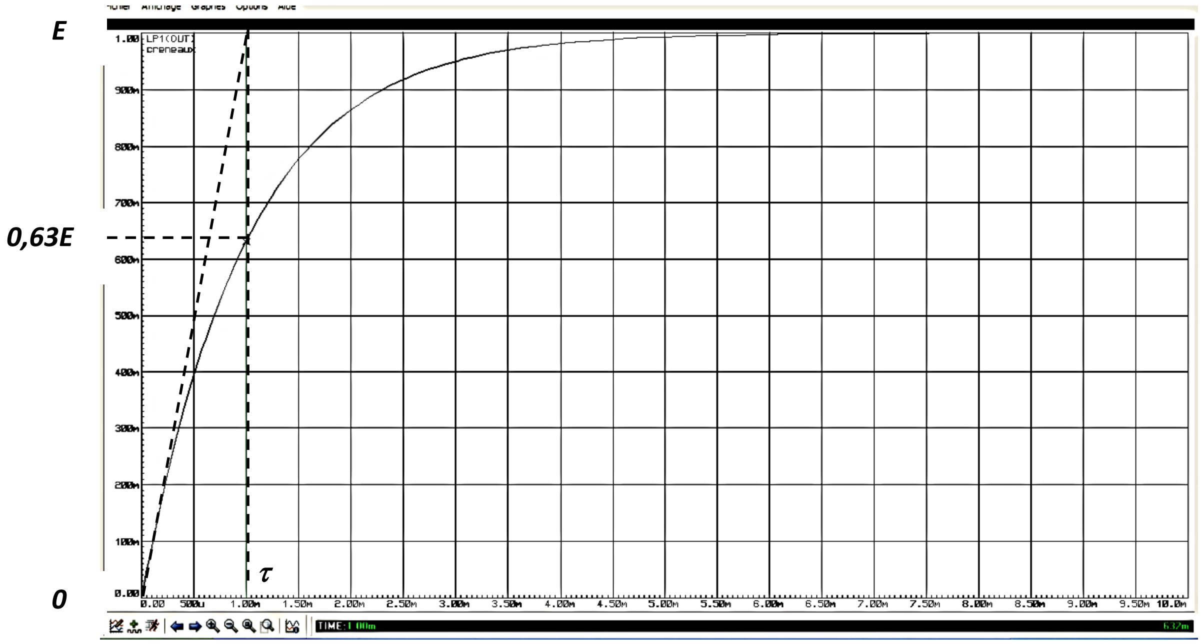
III)1) Modélisation et équation différentielle

Montage :



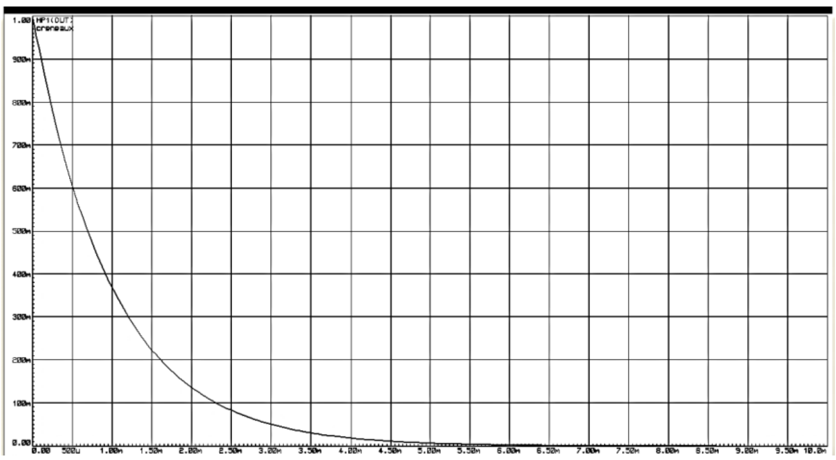
- Commutateur en **position 1** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique ; identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire.

u_C en fonction du temps :



➢ Commutateur en **position 2** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et la mettre sous forme canonique.

u_C en fonction du temps :



III)2) Résolution de l'équation différentielle

Dans le cas du condensateur qui se charge, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{1}{\tau} E$$

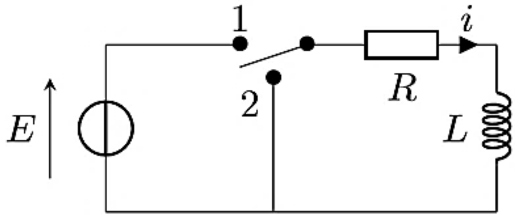
Dans le cas du condensateur qui se charge, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

IV) EXEMPLE en ELECTRICITE : MAGNETISATION ET DEMAGNETISATION D'UNE BOBINE

Propriétés de la bobine :

- **Le courant dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité.**



IV)1 Magnétisation de la bobine

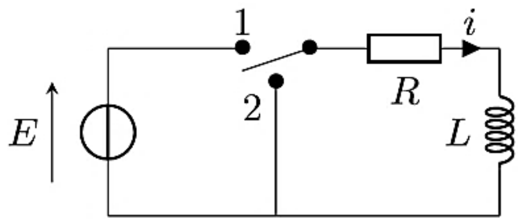
Le commutateur est en **position 1** et permet la **magnétisation de la bobine**.

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire.

- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A t = 0, la bobine est démagnétisée, c'est-à-dire que le courant la traversant est nul.

IV)2) Démagnétisation de la bobine

Le commutateur est en **position 2** et permet la **démagnétisation de la bobine**.



- Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique.

- Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A *t* = 0, la bobine est magnétisée : $i(t = 0) = \frac{E}{R}$.

V) ANALOGIES MECANIQUE / ELECTRICITE

Ce tableau des équivalences sera repris et complété par la suite.

Mécanique	**Electricité**
Position x (m)	
Vitesse v ($m.s^{-1}$)	
Masse m (kg)	
Raideur k ($N.m^{-1}$)	
Frottement h ($N.m^{-1}.s$)	
Force F (N)	

VI) EXEMPLE en THERMODYNAMIQUE : Pertes thermiques

Application :

Une maison subit, pendant une durée dt, des pertes thermiques à travers mur et toit d'expression :

$$\delta Q_{pertes} = K\ (T(t) - T_0)\ dt$$

où $T(t)$ est la température intérieure, T_0 la température extérieure et K un facteur constant.

1. Commenter cette expression.

Le chauffage de la maison est coupé à l'instant $t = 0$, on note T_1 la température initiale, on suppose T_0 constante. $T_1 > T_0$.

2. Quelle va être la température finale de la maison ?

On note C_{maison} la capacité thermique totale de l'habitation.

3. Réaliser un bilan énergétique pour la maison sur une durée infinitésimale dt. En déduire l'équation différentielle liant T et t.

4. Déterminer l'évolution $T(t)$ de la température intérieure au cours du temps.