Compression d'un gaz

41/45

(1) 1) Transformation brutale ⇒ Adiabatique

(2) 1 2) Equilibre mécanique

1 $\Rightarrow P_1 = P_{ext} = 5 . P_0$

1 3) $\Delta U_{01} = W_{01} + Q_{01}$

(4) 1 $Q_{01} = 0$ (adiabatique)

1 $W_{01} = -\int_{V_0}^{V_1} P_{ext} . dV = -P_1 \int_{V_0}^{V_1} dV = -P_1 [V_1 - V_0]$

1 $\Delta U_{01} = C_V (T_1 - T_0)$

1 4) $C_V (T_1 - T_0) = -P_1 (V_1 - V_0)$

(3) $= -P_1 \left(\frac{nRT_1}{P_1} - \frac{nRT_0}{P_0} \right)$

2 $\Leftrightarrow \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0) = -nRT_1 + nRT_0 \frac{P_1}{P_0}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cancel{nR} T_1 - \frac{5}{2} \cancel{nR} T_0 = - \cancel{nR} T_1 + \cancel{nR} T_0 \frac{P_1}{P_0}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} T_1 - \frac{5}{2} T_0 = -T_1 + T_0 \frac{P_1}{P_0} = -T_1 + 5 T_0$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2} T_1 = \frac{5}{2} T_0 + 5 T_0 = \frac{15}{2} T_0$

$$T_1 = \frac{15}{7} T_0$$

1 5) $P_0 V_0 = nRT_0$ et $P_1 V_1 = nRT_1$

$\Rightarrow \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} = \frac{T_1}{T_0} \Rightarrow V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{P_0}{P_1}$

③ $V_1 = V_0 \times \frac{\cancel{15}^{\,3}}{7} \times \frac{1}{\cancel{5}} = \frac{3}{7} V_0$

2 $\underline{V_1 = \frac{3}{7} V_0}$

6) $\Delta S_{01} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - nR \cdot \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$

⑤ 1 $\underline{\Delta S_{01} = \frac{7}{2} nR \ln\left(\frac{15}{7}\right) - nR \ln(5)}$

$\Delta S_{01} = S_{éch\,01} + S_{créé\,01}$

1 $\underline{S_{éch\,01} = \frac{Q_{01}}{T_0} = 0}$

1 d'où : $\underline{S_{créé} = \frac{7}{2} nR \ln\left(\frac{15}{7}\right) - nR \ln(5)}$

1 Transformation non reversible, car $S_{créé} \neq 0$

① 7) les transferts thermiques en sont responsables.

8) Equilibre thermique :

1 $T_2 = T_0$

Equilibre mécanique :

1 $P_2 = P_1$

$P_0 V_0 = nRT_0$

$P_2 V_2 = nRT_2$

③ D'où :

$\frac{P_2 V_2}{P_0 V_0} = \frac{T_2}{T_0} \Rightarrow V_2 = V_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{P_0}{P_2}$

$V_2 = V_0 \frac{P_0}{P_1}$

1 $\underline{V_2 = \frac{V_0}{5}}$

1 9) $\Delta U_{12} = C_V (T_2 - T_1)$

$= \frac{5}{2} nR \left(T_0 - \frac{15}{7} T_0\right)$

$= \frac{5}{2} nR \times \left(-\frac{8}{7}\right) T_0$

1 $= -\frac{20}{7} nRT_0$

$Q_{12} = ?$

1 $W_{12} = -P_1 (V_2 - V_1)$

6 $= -5P_0 \left(\frac{V_0}{5} - \frac{3}{7} V_0\right)$

$= -\cancel{5}P_0 \left(\frac{7V_0 - 15V_0}{3\cancel{5}\;7}\right)$

1 $= \frac{8}{7} P_0 V_0 = \frac{8}{7} nRT_0$

1 $Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12}$ d'après 1er Principe

$= -\frac{20}{7} nRT_0 - \frac{8}{7} nRT_0$

1 $Q_{12} = -4nRT_0$

1 10) $\Delta U_{02} = C_V (T_2 - T_0) = 0$ car $T_2 = T_0$

3 1 $W_{02} = W_{01} + W_{12} = -P_1 (V_1 - V_0) + \frac{8}{7} nRT_0$

1 $Q_{02} = Q_{01} + Q_{12} = 0 + Q_{12} = -4nRT_0$

Vérification :

$W_{02} + Q_{02}$

$= W_{01} + W_{12} + Q_{12}$

$= -P_1(V_1 - V_0) + \frac{8}{7} nRT_0 - 4nRT_0$

$= -5P_0\left(\frac{3}{7}V_0 - V_0\right) + \frac{8}{7} nRT_0 - 4nRT_0$

$= -5P_0V_0 \times \left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{8}{7} nRT_0 - 4nRT_0.$

$= \frac{20}{7} nRT_0 + \frac{8}{7} nRT_0 - 4nRT_0 = \underline{0}$

1 11) Transformation "quasi-statique".
② ⇒ Isotherme car équilibre thermique à chaque instant.
1 ⇒ $\underline{T = T_0}$

12) $P_0V_0 = nRT_0$ Equilibre mécanique :
1 $P_3V_3 = nRT_3$ $\underline{P_3 = \Gamma . P_0}$

② $\Rightarrow \frac{P_3V_3}{P_0V_0} = \frac{T_3}{T_0}$

1 $\Rightarrow V_3 = V_0 \frac{T_3}{T_0}\frac{P_0}{P_3} = \underline{\frac{V_0}{\Gamma}}$

1 13) $\Delta U_{03} = C_V(T_3 - T_0) = \underline{0}$

$\Delta U = W + Q$ $W_{03} = -\int_{V_0}^{V_3} P_{ext} . dV = -\int_{V_0}^{V_3} P . dV$

1 $= -nRT_0 \int_{V_0}^{V_3} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_3}{V_0}\right)$
1 $= \underline{nRT_0 \ln \Gamma}$

d'où : $Q_{03} = -W_{03} = -nRT_0 \ln \Gamma$

1 D'où : $\underline{Q_{03} = -nRT_0 \ln 5}$

6

On obtient :

$$\Delta U_{03} = \Delta U_{02} = 0$$ (fonction d'état)

2 Mais

$W_{03} \neq W_{02}$

et

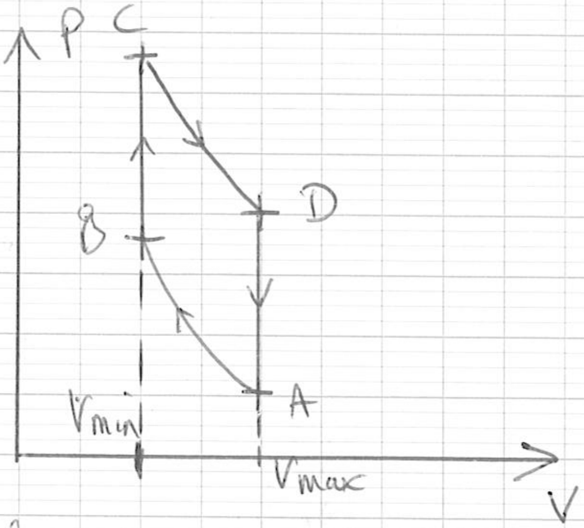
$Q_{03} \neq Q_{03}$

Dépendent du chemin suivi.

Problème : Étude d'un moteur à essence

25 pts

1.



4

1 1 Sens horaire → Cycle Moteur.

1 2. On a : $V_{max} - V_{min} = 900\ cm^3$.

D'où :

$$V_{min} = V_{max} - 900\ cm^3$$

1 $$= 1000 - 900 = 100\ cm^3.$$

1 $$\alpha = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1000}{100} = 10$$

3. On a une compression adiabatique réversible entre A et B.

$$P_B V_B^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma}$$

1 $$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = P_A \alpha^{\gamma}$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

1 $$T_B = T_A \alpha^{\gamma-1}$$

1 A.N : $P_B = 1{,}0 \times 10^{1{,}4} = 25\ bar$

1 $T_B = 300 \times 10^{0{,}4} = 750\ K$

4. $\Delta U_{BC} = n.C_{vm}(T_C - T_B)$

1er principe :

(justif) 1 $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$

Or : $W_{BC} = 0$ car transformation isochore.

D'où :

1 $\underline{Q_{BC} = n.C_{vm}(T_C - T_B) = Q_1}$

1 $\underline{Q_{BC} > 0}$ car $T_C > T_B$

1 Le système reçoit de la chaleur

1 5. $\underline{Q_{DA} = n.C_{vm}(T_A - T_D) = Q_2}$

1 6. $\Delta U_{cycle} = W + Q_1 + Q_2 = 0$

car U est une fonction d'état.

D'où : $\underline{W = -Q_1 - Q_2}$

1 7. $\eta_{théo} = -\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \underline{1 + \frac{Q_2}{Q_1}}$

D'où :

$$\eta_{théo} = 1 + \frac{n.C_{vm}.(T_A - T_D)}{n.C_{vm}(T_C - T_B)}$$

1 $$\underline{\eta_{théo} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}}$$

8. On a : $T_B = T_A \alpha^{\gamma - 1}$

De même :

$T_C = T_D \alpha^{\gamma - 1}$

D'où :

$$\underline{\eta_{théo}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_D\alpha^{\gamma-1} - T_A\alpha^{\gamma-1}}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{(T_A - T_D)}}{\cancel{(T_D - T_A)}\alpha^{\gamma-1}} = \underline{1 - \alpha^{1-\gamma}}$$

AN :

1 $\eta = 1 - 10^{-0,4}$

1 $= 1 - \frac{1}{10^{0,4}}$

1 $= 1 - \frac{1}{2,5}$

1 $= \underline{0,60} = \underline{60\%}$

Calorimétrie — 21 pts

(1) 1) Transformation monobare.

(1) 2) Transformation adiabatique car le calorimètre possède des parois isolées thermiquement.

(3) 3)
$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_{calo}$$
$$= m_1 C(T_f - T_1) + m_2 C(T_f - T_2) + mC(T_f - T_1)$$
$$= (m_1 + m) C(T_f - T_1) + m_2 C(T_f - T_2).$$

$$\Delta H = W_{\neq p} + Q = 0$$

(2) 4)
$$(m_1 + m_2 + m)\cancel{C} T_f = (m_1 + m)\cancel{C} T_1 + m_2 \cancel{C} T_2.$$
$$T_f = \frac{(m_1 + m) T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2 + m}$$

(2) 5) m négligeable ; $m_1 = m_2$

d'où :
$$T_f \simeq \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$
$$\simeq \frac{293 + 373}{2} = 343\,K = 60\,°C$$

(2) 6)
$$\Delta H = RI^2 t = (m + M) c (T - T_0)$$

(2) 7) D'où :
$$(T - T_0) = \frac{RI^2}{(m+M)C} t$$
$$T = \frac{RI^2}{(m+M)C} t + T_0$$

(1) 8) Coeff directeur :
$$a = \frac{RI^2}{(m+M)C}$$

④ | 1 1

$$a = \frac{5 \times 2^2}{0{,}500 \times 4180} \simeq \frac{20}{0{,}5 \times 4000}$$

$$\simeq \frac{20}{2000} \simeq \underline{10^{-2}\ K.s^{-1}}$$

$$a = \frac{RI^2}{(m+M)\,C} \qquad RI^2 \to W \qquad C \to J.K^{-1}.kg^{-1} \qquad (m+M) \to kg$$

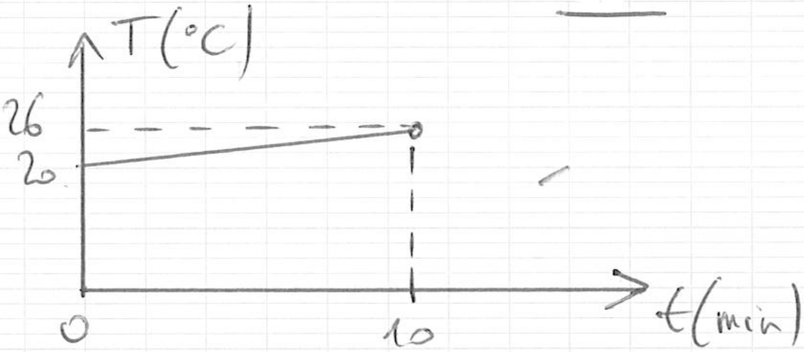
1

$$[a] = \frac{W.K.\cancel{kg}}{\cancel{kg}.J} = K.\frac{W}{J} = K.s^{-1}$$

$t = 0 \to T = T_0 = \underline{20\,°C}$

$t = 10\,min = 600\,s \to T = 10^{-2} \times 600 + T_0 = \underline{26\,°C}$

④



2

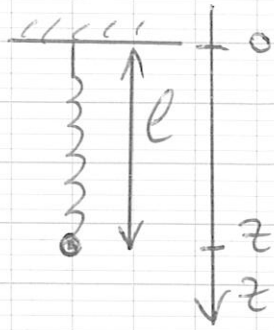
Saut à l'élastique

1

10- $\underline{E_{pe} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2}$

11- $E_{pp} = -mgz$ en prenant l'origine des z au niveau du pont et axe z orienté vers le bas.

$\Rightarrow z = l$



$E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$= -mgz + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2$

Equilibre :

$\frac{dE_p}{dz} = -mg + k(z-l_0) = 0$

d'où :

$$\underline{z = z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} = l_{eq}}$$

12. $\vec{P} = m\vec{g}$ force conservative

$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u_z}$ force conservative

$\Rightarrow$ Il y a conservation de l'énergie mécanique pour chaque phase.

13- $E_m(0) = E_m(l_0)$

$E_p(0) + E_c(0) = E_p(l_0) + E_c(l_0)$

$\underline{0 + 0 = -mgl_0 + \frac{1}{2}mv^2}$

D'où : $\underline{v = \sqrt{2gl_0}}$

A.N. : $v = \sqrt{2\times10\times80} = \sqrt{1600} = \underline{40\ m.s^{-1}}$

14- Conservation de l'énergie mécanique entre l_0 et l_{max} :

$E_m(l_0) = E_m(l_{max})$

$\underbrace{-mgl_0 + \frac{1}{2}mv^2}_{0} = \frac{1}{2}k(l_{max}-l_0)^2 - mgl_{max}$

$$\frac{1}{2}k\left(\ell_{max}-\ell_0\right)^2-mg\,\ell_{max}=0$$

$$\frac{1}{2}k\left(\ell^2_{max}-2\ell_{max}\ell_0+\ell_0^2\right)-mg\,\ell_{max}=0$$

$$\frac{1}{2}k\ell^2_{max}-\left(k\ell_0+mg\right)\ell_{max}+\frac{1}{2}k\ell_0^2=0$$

En divisant par $\frac{1}{2}k$:

$$\ell^2_{max}-2\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)\ell_{max}+\ell_0^2=0$$

Equation du second degré en ℓ_{max}.

$$\Delta=4\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)^2-4\ell_0^2>0.$$

$$\ell_{max}=\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$$

En conservant la valeur la + élevée :

$$\ell_{max}=\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)^2-4\ell_0^2}$$

$$\ell_{max}=\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)+\sqrt{\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)^2-\ell_0^2}$$

$$\ell_{max}=\ell_{eq}+\sqrt{\ell_{eq}^2-\ell_0^2}$$

15. $H_{pont}>\ell_{eq}+\sqrt{\ell_{eq}^2-\ell_0^2}$

A.N : $\ell_{eq}=\ell_0+\frac{mg}{k}=80+\frac{75\times 10}{150}=85\text{ m}$

$H_{pont}>85+\sqrt{85^2-80^2}\simeq 115\text{ m}$