CPGE ATS

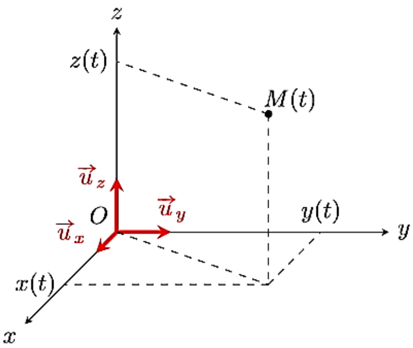
Programme de colles – Semaine 6 (4 au 9 novembre 2024)

Chapitre étudié et questions de cours : Systèmes du premier ordre.

2 questions de cours par étudiant : 1 question de cours (parmi les questions 1 à 10), 1 « démo » (parmi les questions 11 à 17).

Questions de cours :

1) Donner les expressions des vecteurs position, vitesse instantanée et accélération instantanée, ainsi que leurs unités.



Vecteur position (mètres, m) :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$$

Vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($v_{M/R}$ en **mètres par seconde, m.s^{-1}**) :

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y + \dot{z}.\vec{u}_z$$

Vecteur accélération instantanée $\vec{a}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($a_{M/R}$ en **mètres par seconde au carré, m.s^{-2}**) :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \ddot{x}.\vec{u}_x + \ddot{y}.\vec{u}_y + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

2) Donner les expressions de la vitesse moyenne et de l'accélération moyenne + unités.

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x***, la **vitesse moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$v_{MOY} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (en mètres par seconde, m.s^{-1})

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x***, **l'accélération moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$a_{MOY} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (en mètres par seconde au carré, m.s^{-2})

3) Donner l'expression de la quantité de mouvement et du Principe fondamental de la dynamique.

Quantité de mouvement d'un point matériel M de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\overrightarrow{p_{M/R}} = m.\overrightarrow{v_{M/R}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext\ sur\ M} = \left(\frac{d\overrightarrow{p_{M\,/\,R}}}{dt}\right) = m.\overrightarrow{a_{M\,/\,R}}$$

4) Donner les expressions des forces suivantes : poids, force de rappel élastique, force de frottement fluide, poussée d'Archimède.

Poids : $\vec{P} = \vec{F}_{Terre \to m} = m.\vec{g}$

P poids en newtons (N)

m masse en kilogrammes (kg)

g accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

Force de rappel élastique : $\vec{T} = -k.(l - l_0).\overrightarrow{u_x} = -k.x.\overrightarrow{u_x}$

T en newtons (N)

k = raideur du ressort (N.m^{-1})

x = allongement du ressort : $x = l - l_0$ (m)

$\overrightarrow{u_x}$: vecteur unitaire sortant du ressort

Force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$

f en newtons (N)

h coefficient de frottement fluide (kg.s^{-1})

v : vitesse du point matériel (m.s^{-1})

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \overrightarrow{u_z}$ (pour un axe *z* orienté vers le bas)

5) Donner les expressions de l'accélération, de la vitesse et de la position pour les mouvements suivants : MRU ET MRUA.

Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : mouvement rectiligne à vitesse constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(t) = 0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = v_0$
- **Position** $x(t) = v_0 t + x_0$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) : mouvement rectiligne à accélération constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(0) = a_0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = a_0.t + v_0$

- **Position** $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$

6) Donner les expressions du travail d'une force + unités.

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$\boldsymbol{\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}}$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B :

$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$

7) Donner la définition de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\boldsymbol{E_{c,M/R} = \frac{1}{2}m{v_{M/R}}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}}$$

8) Donner la définition de l'énergie potentielle, ainsi que les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle *E_P*** :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)}$$

Ou, sous forme infinitésimale :

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) = -dE_P}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le bas :

$$\boldsymbol{E_{PP} = -\,mgz + cte'}$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique $E_{P\,él}$ dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}}$ exercée par un ressort de raideur *k* :

$$\boldsymbol{E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \Rightarrow \overrightarrow{F_{él}} = -k.x.\overrightarrow{u_x}} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

9) Donner la définition de l'énergie mécanique et du théorème de l'énergie mécanique.

Energie mécanique d'un point matériel :

$$E_m = E_C + E_P$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})$$

10) Définitions des positions d'équilibre stable et instable à partir de l'énergie potentielle.

Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0$$

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0$$

Démos de cours :

11) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. A partir du PFD, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

BAME :

$\vec{P} = mg\overrightarrow{u_z}$ (axe z orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_{M/R}} = -h\vec{v} = -hv\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext\ sur\ M} = \left(\frac{d\overrightarrow{p_{M\,/\,R}}}{dt}\right) = m.\overrightarrow{a_{M\,/\,R}}$

$\vec{P} + \cancel{\overrightarrow{\Pi_a}} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - h\vec{v} = m\vec{a}$

$mg\overrightarrow{u_z} - hv\overrightarrow{u_z} = m\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_z}$

Projection sur $\overrightarrow{u_z}$:

$mg - hv = m\frac{dv}{dt}$

Ou : $m\frac{dv}{dt} + hv = mg$

En considérant $m \neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g}$

Forme canonique standard :

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{\mathbf{dt}}+\frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})}$$

Par identification : $\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{h}}$

12) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f}=-h\vec{v}$. A partir du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

Force conservative : $\vec{P}=mg\overrightarrow{u_z}$, associée à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}=-mgz+cte$ (axe z orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force non conservative : force de frottement fluide $\vec{f}=-h\overrightarrow{v_{M/R}}=-h\vec{v}$ dont la puissance est $P_{non\ cons}=\vec{f}.\vec{v}=-h\vec{v}.\vec{v}=-hv^2$

Energie cinétique de la bille : $E_{c,M/R}=\frac{1}{2}m{v_{M/R}}^2=\frac{1}{2}mv^2$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt}=\frac{d}{dt}(E_C+E_P)=\sum P_{non\ cons}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2-mgz\right)=-hv^2$$

$$m\frac{dv}{dt}v-mgv=-hv^2$$

Ou : $v\left(m\frac{dv}{dt}+hv\right)=vmg$

En considérant $v\neq 0$, on obtient :

$$\boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}+\boldsymbol{hv}=\boldsymbol{mg}$$

En considérant $m\neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}+\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}}$

Forme canonique standard :

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{\mathbf{dt}}+\frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})}$$

Par identification : $\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{h}}$

13) Résoudre l'équation différentielle suivante, compte tenu de la condition initiale $v(0) = 0$:

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}v(t) = g$$

a) **Solution de l'équation différentielle homogène (SEH) :**

$v_H(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ où A est une constante qui sera déterminée à partir des conditions initiales.

b) **Solution particulière (SP)** de l'équation différentielle = une solution simple de l'équation différentielle, de même forme que le second membre.

$v_P(t) = \tau g = \frac{mg}{h}$ est solution de l'équation différentielle.

c) **Solution générale (SG)** = somme de la solution de l'équation différentielle homogène (SEH) et de la solution particulière (SP).
SG = SEH + SP

$v_G(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{mg}{h}$

d) **Condition(s) initiale(s)** (CI) : La connaissance de $v(0)$ ou bien $\frac{dv}{dt}(0)$ est nécessaire pour déterminer *la* **solution physique *unique***.

Considérons que la bille est lâchée sans vitesse initiale, on a donc : $\boldsymbol{v(0) = 0}$.

e) Détermination de la **constante d'intégration A** à partir des conditions initiales.

Physiquement : $v(0) = 0$

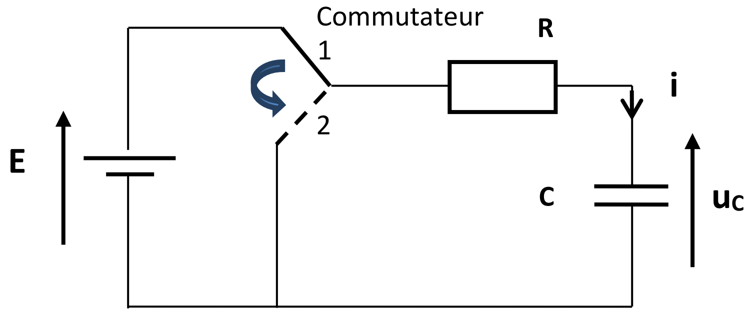
Mathématiquement : $v(t) = v_G(t) = Ae^0 + \frac{mg}{h} = A + \frac{mg}{h}$

On en déduit : $0 = A + \frac{mg}{h}$ ou encore $\boldsymbol{A = -\frac{mg}{h}}$

Conclusion : la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$v(t) = -\frac{mg}{h}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{mg}{h} = \frac{mg}{h}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

14) Montage :



Commutateur en **position 1** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{u_C(t)}$ et la mettre sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle compte-tenu de la condition initiale $u_C(0) = 0$.

Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_C = 0$

Appliquer la loi entre *u* et *i* pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$, d'où :

$$E - RC\frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = RC$.

SEH : $u_{CH} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $u_{CP} = E$

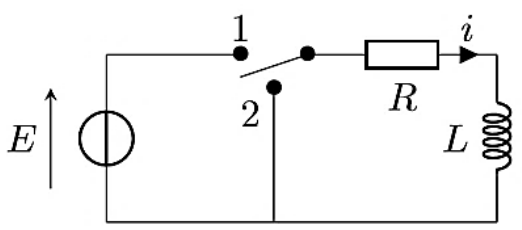
SG : $u_C = u_{CH} + u_{CP} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

CI : Physiquement : $u_C(0) = u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité ; le condensateur est initialement déchargé). Mathématiquement : $u_C(0) = A + E$ d'où : $A = -E$

Solution : $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

15) Montage :

Le commutateur est en **position 1** et permet la **magnétisation de la bobine**. Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). M*ettre cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A *t* = 0, la bobine est démagnétisée, c'est-à-dire que le courant la traversant est nul.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_L = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$, d'où :

$$E - R.i\ - L\frac{di}{dt} = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

SEH : $i_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $i_P = \frac{E}{R}$

SG : $i = i_H + i_P = \ Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

CI : Physiquement : $i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 0$ (le courant dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité ; la bobine est initialement démagnétisée). Mathématiquement : $i(0) = A + \frac{E}{R}$ d'où : $A = \ -\frac{E}{R}$

Solution : $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

16) Donner les analogies mécanique – électricité.

Mécanique	**Electricité**
Position *x* (m)	Charge *q* (C)
Vitesse *v* (m.s^{-1})	Intensité *i* (A)
Masse *m* (kg)	Inductance *L* (H)
Raideur *k* (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité *C* (F)
Frottement *h* (N.m^{-1}.s)	Résistance *R* (Ω)
Force *F* (N)	Tension *u* (V)

17) Une maison subit, pendant une durée dt, des pertes thermiques à travers mur et toit d'expression :

$$\delta Q_{pertes} = K\ (T(t) - T_0)\ dt$$

où $T(t)$ est la température intérieure, T_0 la température extérieure et K un facteur constant.

Le chauffage de la maison est coupé à l'instant $t = 0$, on note T_1 la température initiale, on suppose T_0 constante. $T_1 > T_0$.

1. Quelle va être la température finale de la maison ?

On note C_{maison} la capacité thermique totale de l'habitation.

2. Réaliser un bilan énergétique pour la maison sur une durée infinitésimale dt. En déduire l'équation différentielle liant T et t.

3. Déterminer l'évolution $T(t)$ de la température intérieure au cours du temps.

1. Si le chauffage est coupé, la température baisse à cause des pertes thermiques vers l'extérieur, jusqu'à avoir la même température dehors et dedans (équilibre thermique)

$$\boldsymbol{T_f = \lim_{t \to \infty} T = T_0}$$

2. Bilan énergétique entre t et $t + dt$, alors que la température de la maison passe de T à $T + dT$ (avec $dT < 0$)

L'énergie mécanique de la maison ne varie pas.

La transformation ayant lieu à pression atmosphérique, le premier principe appliqué à la maison entre t et $t + dt$:

$$dH \underbrace{=}_{isobare} \delta Q_{reçu\ par\ la\ maison} = -\boldsymbol{\delta Q_{pertes}}$$

La variation d'enthalpie entre t et $t + dt$ est :

$$dH = C_{maison}\,(T + dT - T) = C_{maison}\, dT$$

d'où $\quad C_{maison}\, dT = -K\,(T(t) - T_0)\, dt \quad$ soit $\quad C_{maison}\,\frac{dT}{dt} + K\,(T(t) - T_0) = 0 \quad$ ou encore

$C_{maison}\,\frac{dT}{dt} + KT(t) = KT_0 \quad$ L'équation différentielle liant T et t peut s'écrire

$$\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C_{maison}} T(t) = \frac{K}{C_{maison}} T_0$$

3. Résolution : On identifie la constante de temps du problème : $\tau = \frac{C_{maison}}{K}$

L'équation est alors $\quad \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T(t) = \frac{1}{\tau} T_0$

La solution générale de cette équation est $\quad T(t) = T_0 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

À l'instant initial, $\quad T(t = 0) = T_1 = T_0 + A \quad$ d'où $\quad A = T_1 - T_0$

La température intérieure de la maison est donnée par : $\quad \boldsymbol{T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Avec $\quad \boldsymbol{\tau = \frac{C_{maison}}{K}}$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.