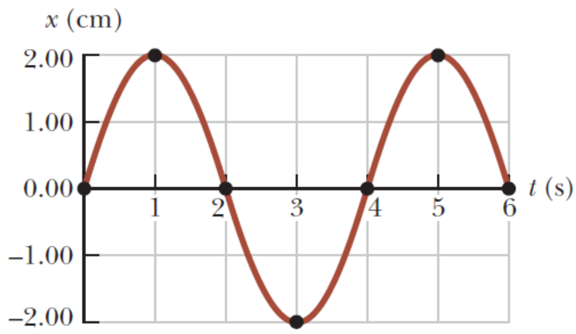
M4 OSCILLATEUR HARMONIQUE

Travaux Dirigés (1)

Exercice 1 : Détermination expérimentale des caractéristiques du mouvement

(sans calculatrice) *On donne* $\pi^2 \approx 10$.

Un objet attaché à un ressort vibre avec un mouvement harmonique simple décrit par la figure ci-contre.



Déterminer pour ce mouvement :

(a) l'amplitude,

(b) la période,

(c) la pulsation,

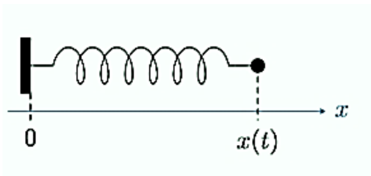
(d) la vitesse maximale,

(e) l'accélération maximale,

(f) une équation pour la position $x(t)$ en fonction du temps.

Exercice 2 : Oscillateur masse-ressort horizontal

On considère un système masse-ressort horizontal.

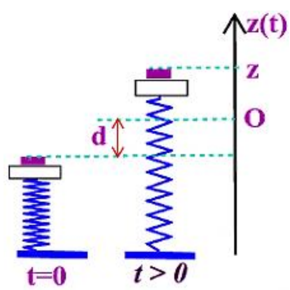


Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse *m*. La constante de raideur du ressort vaut *k*, sa longueur à vide vaut l_0.

Le système évolue sans frottement sur un plan horizontal.

1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse *m*. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par *x(t).* Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre ω_0 du système.
3) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle précédente.
4) On donne les conditions initiales : $x(0) = X_1$; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes *A* et *B*. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de *x* en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

Exercice 3 : Oscillateur masse-ressort vertical



On considère un système masse-ressort maintenu verticalement par un dispositif dont on néglige les effets.

Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse *m*. La constante de raideur du ressort vaut *k*, sa longueur à vide vaut l_0.

Le système évolue sans frottement.

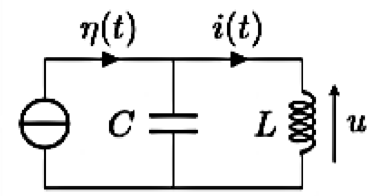
La position *z* = 0 correspond à la longueur à vide du ressort.

1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse *m*. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par *z(t).* Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre ω_0 du système.

On donne la solution générale de l'équation différentielle : $z(t) = A + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3) Montrer que cette expression est bien solution de l'équation du mouvement, si A a une valeur particulière. A quoi correspond cette valeur de A ?
4) On donne les conditions initiales : $z(0) = Z_0$; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes A et B. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de z en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

Exercice 4 : Etude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique



Dans le circuit représenté ci-contre, le générateur de courant, supposé idéal, est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant $\eta(t)$, passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On note $E_{TOT} = E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1) Exprimer la dérivée $\frac{dE_{TOT}}{dt}$ en fonction de i et $\frac{di}{dt}$.
2) Justifier qualitativement que E_{TOT} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i. La mettre sous forme canonique $\frac{d^2i}{dt^2} + {\omega_0}^2 i = 0$; donner l'expression de la pulsation propre ω_0. Retrouver cette équation différentielle en appliquant les lois de Kirchoff.
3) A partir de considérations physiques, établir les conditions initiales $i(0)$ et $\frac{di}{dt}(0)$.
4) En déduire l'expression de $i(t)$.

Exercice 5 : Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Soit un système M de masse m relié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Ox) où O représente le point d'attache du ressort. Par une étude énergétique, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + kx = kl_0$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour l'une des conditions initiales suivantes :

a) Vitesse initiale nulle, position initiale x_0
b) Vitesse initiale v_0, élongation initiale nulle
c) Cas général : vitesse initiale v_0, position initiale x_0

Cette résolution sera faite avec une solution générale à l'équation homogène de la forme :

1) $x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ 2) $x_H(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Exercice 6 : Mobile lié par deux ressorts

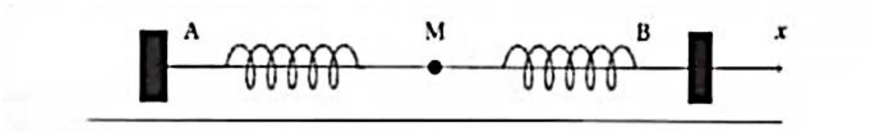
On considère un mobile supposé ponctuel de masse m, astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox, et maintenu par deux ressorts identiques, de même raideur k et de même longueur au repos l_0, dont les extrémités sont fixées en deux points A et B (schéma page suivante).

Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$.

La position du point M est décrite par $x(t)$, écart par rapport à la position d'équilibre.

On néglige tout frottement.

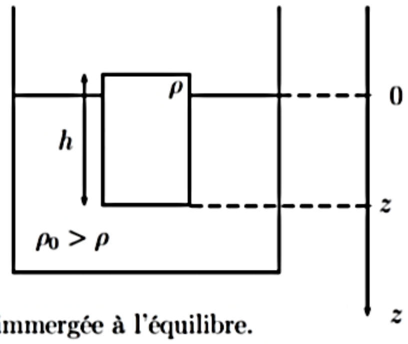
A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0.



1) Exprimer les tensions exercées par les deux ressorts sur la masse, puis la tension totale.
2) Etablir l'équation différentielle dont *x(t)* est solution et montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre ω_0 et la période T_0, en fonction de k et m.
3) Déterminer l'expression de x en fonction de t, en tenant compte des conditions initiales.
4) L'énergie mécanique du système est-elle conservée ? Donner l'expression de l'énergie cinétique E_m du mobile, et en déduire celle de son énergie potentielle élastique $E_{pé}$.

Exercice 7 : Immersion d'un cylindre

Un cylindre de section $s = 1$ cm^2, de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique ρ) est placé dans l'eau (masse volumique ρ_0). Un système annexe, non représenté sur la figure, maintient son axe de révolution vertical.



1. Déterminer z_0 la hauteur immergée à l'équilibre.

2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre. On note $\varepsilon = z - z_0$ l'écart par rapport à la position d'équilibre.

3. En appliquant le PFD au cylindre, établir l'équation différentielle du mouvement (équation différentielle vérifiée par ε). Montrer que la pulsation propre ω_0 peut s'écrire : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$. En déduire l'expression de la période propre T_0. Vérifier l'homogénéité du résultat (dimensions des grandeurs ω_0 et T_0).

Exercice 8 : Etude du pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à une tige rigide de masse supposée négligeable et de longueur ℓ.

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule simple à l'aide du théorème de la puissance mécanique.
2) Quelle est l'influence sur l'équation du choix de l'origine de l'énergie potentielle ?
3) Déterminer à l'aide de l'équation différentielle du mouvement les positions d'équilibre du pendule.
4) On limite la suite de l'étude au voisinage de la position d'équilibre stable : au voisinage de $\theta = 0$, on peut assimiler $\sin\theta$ et θ (attention, θ en radians !) : on prendra donc dans la suite $\sin\theta \approx \theta$. Simplifier l'équation différentielle au voisinage de l'équilibre ; commenter.
5) Définir la grandeur caractéristique de cet oscillateur

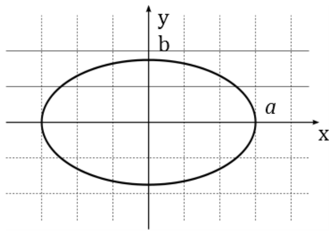
Exercice 9 : Portait de phase

Considérons un oscillateur harmonique d'équation horaire $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$; X_m et φ sont supposées déterminées en fonction des conditions initiales.

Complément mathématique :

Si a et b sont deux constantes telles que $a > b > 0$, alors l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est celle d'une ellipse centrée sur O de demi grand-axe a et de demi petit-axe b.

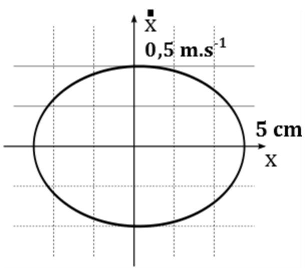
Si r constante positive, alors l'équation $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ est celle d'un cercle centré sur O de rayon r.



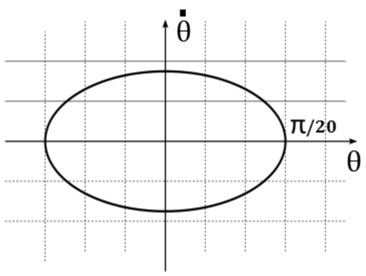
1) Etablir l'expression de la vitesse et en déduire le rectangle du plan de phase dans lequel s'inscrit la trajectoire de phase étudiée.
2) Etablir l'expression de la trajectoire de phase (sous la forme $\dot{x} = f(x)$)le portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti et la représenter dans le plan de phase.
3) Etablir l'expression de l'énergie mécanique, et indiquer comment les trajectoires de phase évoluent lorsque l'énergie mécanique augmente.
4) À l'instant initial, l'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre stable de x_0 (avec $x_0 > 0$) et lâché sans vitesse initiale ($\dot{x}_0 = 0$). Placer le point M_{01} correspondant dans le plan de phase. Quel est le signe de $\dot{x}$ juste après qu'on lâche l'oscillateur ? En déduire le sens de parcours (qui peut être indiqué par une flèche).
5) À l'instant initial, l'oscillateur est à sa position d'équilibre stable ($x_0 = 0$) et on lui donne une vitesse initiale $\dot{x}_0$ (avec $\dot{x}_0 > 0$). Placer le point M_{02} correspondant. Quel est le signe de x lorsque l'oscillateur quitte sa position d'équilibre ? En déduire le sens de parcours.
6) Si un point représentatif d'une trajectoire de phase (quelconque) se trouve au-dessus de l'horizontale, que pouvez-vous affirmer ? En déduire le sens de parcours de la trajectoire.
7) On se place à présent dans le plan de phase $\frac{\dot{x}}{\omega_0} = f(x)$) ; que devient l'équation d'une trajectoire de phase quelconque ? quelle est alors son allure ?

Exercice 10 : Lecture d'un diagramme de phase

On donne ci-dessous deux trajectoires de phase :



Trajectoire de phase d'un oscillateur horizontal, de masse $m = 50\ g$, dont la position est repérée sur un axe x'x.



Trajectoire de phase d'un pendule simple, de longueur $L = 20\ cm$, de masse $m = 50\ g$, repéré par un angle θ.

L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$. À partir de ces trajectoires de phase, déterminer :

1) La position d'équilibre de chacun des oscillateurs ainsi que la stabilité de ces positions

2) La vitesse maximale du pendule et l'énergie mécanique de chacun des oscillateurs
3) La raideur du ressort équivalent à l'oscillateur horizontal

Exercice 11 : Homogénéité et caractère harmonique

Vérifier l'homogénéité des équations ou équations différentielles suivantes (en proposant une correction le cas échéant), et pour chacune d'entre elles indiquer s'il s'agit ou pas d'une équation caractéristique d'un oscillateur harmonique simple.

a) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{k}{m}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k constante de raideur d'un ressort.

b) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{m}{k}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k constante de raideur d'un ressort, α coefficient de frottement tel que la force de frottement est $F = -\alpha v$, avec v vitesse.

c) $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{L}{g}\theta(t) = 0$ avec θ angle de rotation et L longueur d'un pendule, et g accélération de la pesanteur.

d) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{m}{k_1+k_2}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k_i constantes de raideur de ressorts.

e) $v(t) = \frac{L}{\omega}\cos(2\pi f t)$ avec v vitesse, f fréquence, ω fréquence angulaire et L longueur.

Exercice 12 : Saut à l'élastique – résolution de problème

Comment choisir les caractéristiques d'un élastique pour que le saut se déroule dans des conditions de sécurité nécessaires au pont d'Aubry ?

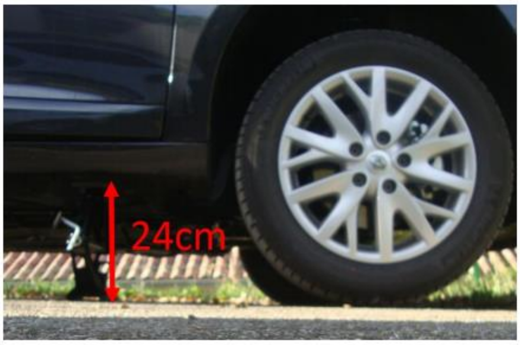
Indications : déterminer les contraintes exercées au niveau du sauteur ; préciser les caractéristiques de l'élastique mises en jeu ; estimer les ordres de grandeur nécessaires ; modéliser le phénomène dans le cadre d'hypothèses simples.

Exercice 13 : Oscillations en voiture – résolution de problème

Pour des fréquences inférieures à $0{,}5\ Hz$, les organes internes du corps entrent en résonance (en particulier l'estomac) et le mal des transports apparaît.

Sera-t-on malade dans cette voiture ?

On donne deux photos d'une roue avec et sans cric :



Exemple de grille d'évaluation pour la résolution de problème

Compétence	Capacités exigibles associées
S'approprier le problème	Faire un schéma modèle. Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées. Relier le problème à une situation modèle connue.
Etablir une stratégie de résolution (analyser)	Décomposer le problème en des problèmes plus simples. Commencer par une version simplifiée. Expliciter la modélisation choisie (définition du système, etc.). Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.
Mettre en œuvre la stratégie (réaliser)	Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique.
Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider)	S'assurer que l'on a répondu à la question posée. Vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeurs connus. Comparer le résultat obtenu avec le résultat d'une autre approche (mesure expérimentale donnée ou déduite d'un document joint, simulation numérique, etc.). Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue.
Communiquer	Présenter la résolution, en en expliquant le raisonnement et les résultats.