M4 OSCILLATEUR HARMONIQUE

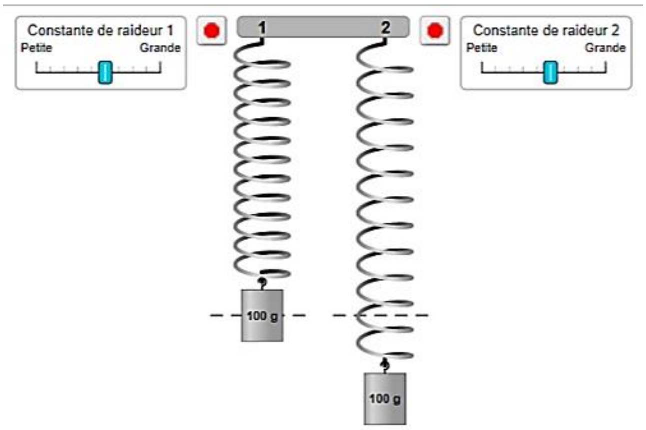
Programme ATS

4. Oscillations libres	
Interprétation avec le graphe de l'énergie potentielle	Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
Oscillateur non amorti	Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique. Étude expérimentale d'un oscillateur harmonique.
Portrait de phase	Interpréter un portrait de phase fourni ou relevé expérimentalement.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 2	Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides. Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique. Identifier les différents régimes et exploiter les courbes. Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1. Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement.

I) EXEMPLE D’OSCILLATEUR HARMONIQUE MECANIQUE NON AMORTI : LE SYSTEME MASSE-RESSORT

I)1) Expérience

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_fr.html

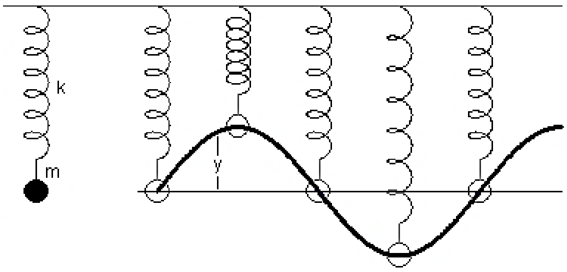


1 : Système en équilibre (statique)

2 : Système à l’instant *t* (dynamique)

Observations :

a) En l’absence de frottement (amortissement), le mouvement de la masse *m* est sinusoïdal (ou harmonique), de fréquence f_0.
b) Si on augmente la masse *m*, la fréquence f_0 diminue.
c) Si on augmente la constante de raideur *k* du ressort, la fréquence f_0 augmente.



Position de la masse *m*, sinusoïdale en fonction du temps.

I)2) Force de rappel élastique du ressort : rappels

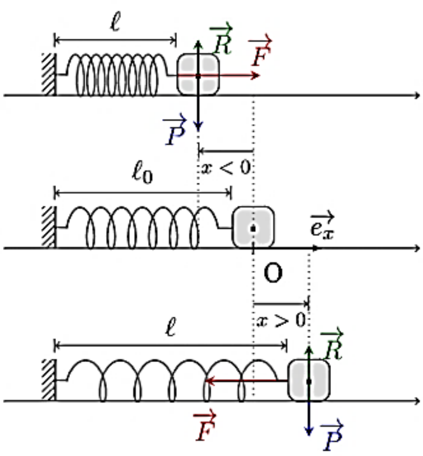


Photo 1 : Ressort comprimé, $\vec{F} = \vec{F}_{ressort\ sur\ masse}$ dans le sens de $\vec{e}_x$ (vecteur unitaire « sortant » du ressort).

Photo 2 : Ressort en position d’équilibre, $\vec{F} = \vec{F}_{ressort\ sur\ masse} = \vec{0}$.

Photo 3 : Ressort étiré, $\vec{F} = \vec{F}_{ressort\ sur\ masse}$ dans le sens de $-\vec{e}_x$.

Caractérisation du ressort : Un ressort idéal (sans masse, parfaitement élastique, à spires non jointives) est caractérisé par sa **longueur à vide l_0 (m)** et sa **constante de raideur k (N.m^{-1}).**

Remarque : Ce sont des données « constructeur » : ces caractéristiques ne dépendent pas de la manière dont le ressort est utilisé (compression, extension, valeur de la masse accrochée en bout, …).

Force de rappel élastique : Une masse *m* accrochée à l'extrémité d'un ressort idéal subit une force de rappel :

$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s}$ en newtons (N)

Avec : k constante de raideur du ressort (N.m^{-1})

$l - l_0$ allongement du ressort (m)

$\vec{u}_s$ vecteur unitaire « sortant » du ressort

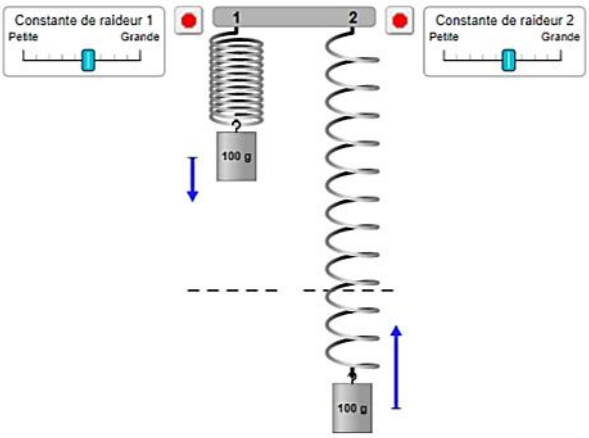


Photo 1 : Ressort comprimé

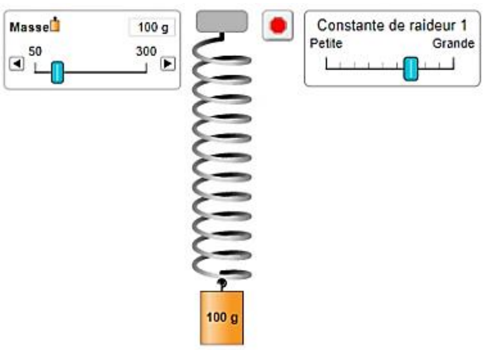
$l - l_0 < 0 \Rightarrow \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s$ suivant $+\vec{u}_s$

Photo 2 : Ressort étiré

$l - l_0 > 0 \Rightarrow \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s$ suivant $-\vec{u}_s$

Remarque : la force de rappel élastique est toujours orientée de sorte que le ressort retrouve sa longueur à vide.

I)3) Equilibre du système masse-ressort vertical



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse *m* supposée ponctuelle

BAME :

Principe fondamental de la dynamique :

Détermination de la longueur du ressort à l'équilibre $\boldsymbol{l_{eq}}$:

I)4) Système masse-ressort vertical en mouvement

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse *m* supposée ponctuelle

BAME :

Principe fondamental de la dynamique :

En projetant sur l'axe *z* :

Equation différentielle vérifiée par la position $\boldsymbol{z = l - l_{eq}}$:

I)5) Résolution de l'équation différentielle

a) Solution de **l'équation différentielle homogène** (SEH) :

Les solutions de l'équation différentielle homogène du type

$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0}$ s'écrivent sous la forme :

$\boldsymbol{x_H(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

$\boldsymbol{X_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $\boldsymbol{x(0)}$ et $\boldsymbol{\frac{dx}{dt}(0)}$

ou

$\boldsymbol{x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $\boldsymbol{x(0)}$ et $\boldsymbol{\frac{dx}{dt}(0)}$

Ici : $\boldsymbol{z_H(t)} =$

b) **Solution particulière** (SP) : Ici : $\boldsymbol{z_P(t)} =$

c) **Solution générale** (SG) : $\boldsymbol{z(t)} =$

d) **Conditions initiales** (CI) : 2 conditions initiales sont nécessaires

Par exemple :

e) Détermination des **constantes d'intégration** :

Vérification :

Pulsation du mouvement = Pulsation propre : $\boldsymbol{\omega_0} =$

Fréquence du mouvement = Fréquence propre : $\boldsymbol{f_0} =$

Période du mouvement = Période propre : $\boldsymbol{T_0} =$

Amplitude du mouvement : $\boldsymbol{Z_m} =$

Phase à l'origine du mouvement :

Phase du mouvement :

Evolution de z en fonction du temps :

GENERALISATION :

Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique non amorti)

Forme canonique : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = cte$ avec ω_0 pulsation propre (rad.s^{-1})

Solution : $x(t) = SP + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

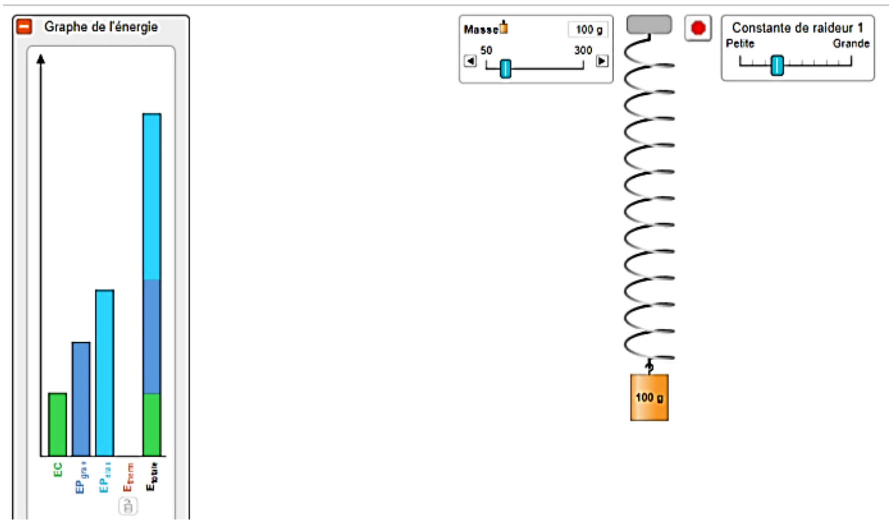
X_m et φ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $x(0)$ et $\frac{dx}{dt}(0)$

ou

Solution : $x(t) = SP + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $x(0)$ et $\frac{dx}{dt}(0)$

I)6) Oscillateur harmonique non harmonique et conservation de l'énergie



Energie cinétique du système E_C :

Energie potentielle de pesanteur du système E_{PP} :

Energie potentielle élastique du système = **Energie potentielle élastique de la masse *m*** :

Un ressort idéal emmagasine de l'énergie appelée Energie Potentielle Elastique E_{PE} :

$$E_{PE} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

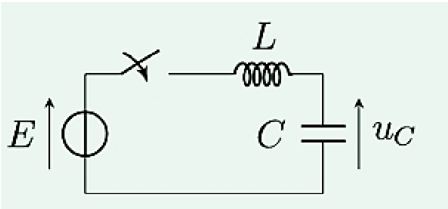
Cette énergie est toujours positive ou nulle, que le ressort soit comprimé ($l < l_0$) ou allongé ($l > l_0$).

L'énergie mécanique du système est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système :

$\boldsymbol{E_m = E_P + E_C =}$

Montrons que **l'énergie mécanique du système masse – ressort se conserve** :

II) EXEMPLE D’OSCILLATEUR HARMONIQUE ELECTRIQUE NON AMORTI



A l’instant t = 0 on ferme l’interrupteur.

1) Etablir l’équation différentielle vérifiée par la tension $\boldsymbol{u_C}$.
2) Mettre cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la pulsation propre du circuit.
3) Donner la forme générale de la solution de cette équation différentielle.

On suppose que le condensateur est initialement déchargé.

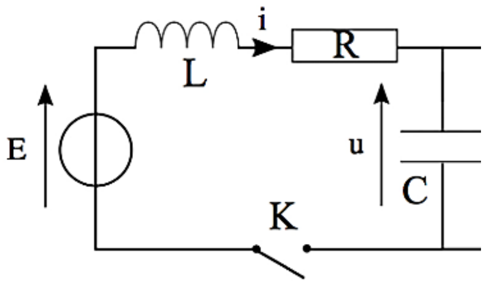
4) A partir de la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de la continuité de l'intensité traversant la bobine, donner la condition initiale portant sur u_C et celle portant sur $\frac{du_C}{dt}$.
5) A partir des C.I. précédentes, déterminer **la** solution physique de l'équation différentielle.
6) Tracer l'évolution de u_C en fonction du temps.

III) EXEMPLE D'OSCILLATEUR ELECTRIQUE AMORTI : LE CIRCUIT RLC SERIE

III)1) Expérience

On soumet un circuit RLC à un **échelon de tension**, on fait l'acquisition de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps.

Montage :



E : générateur de tension idéal ; E = 10 V

L : inductance parfaite ; L = 0,2 H

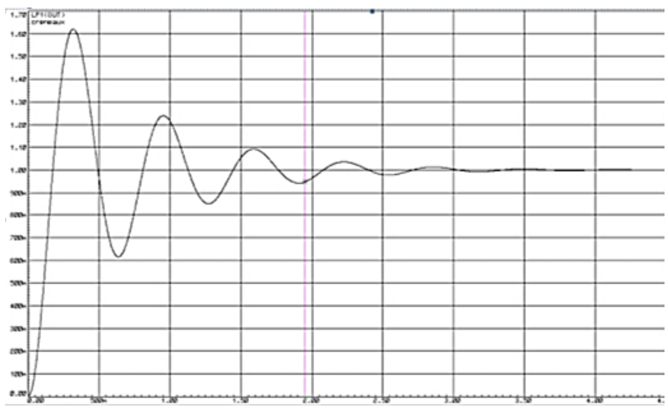
C : condensateur parfait ; C = 5 µF

R : résistance variable

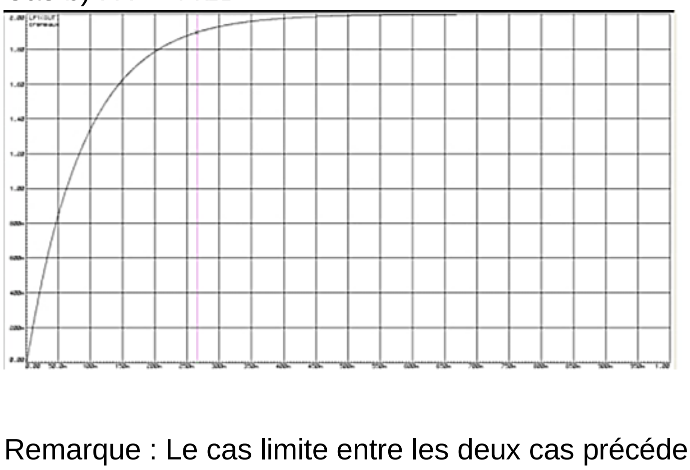
On ferme l'interrupteur K à t = 0.

Observation : L'évolution de u_C en fonction du temps, ou la forme du régime transitoire, dépend de la valeur de R.

Cas a) : R = 40 Ω

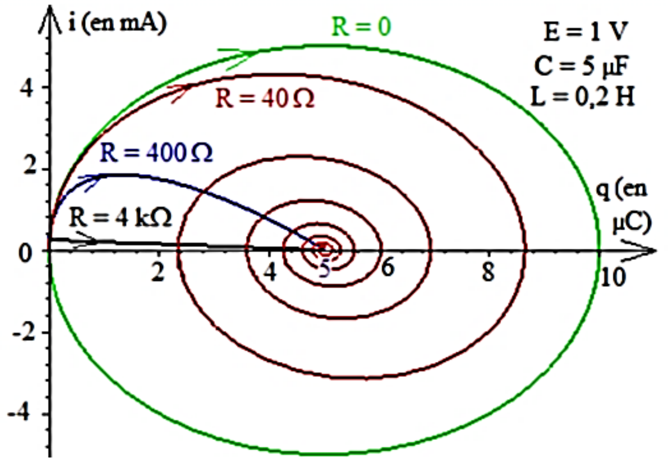


Cas b) : R = 4 kΩ



Remarque : Le cas limite entre les deux cas précédents est appelé **régime critique**.

Portraits de phase $\quad Abscisse : q \quad Ordonnée : i = \frac{dq}{dt}$



R = 0 (cas idéal)

R = 40 Ω

R = 400 Ω

R = 4 kΩ

Aspects énergétiques

- Le générateur fournit de l'énergie électrique au circuit (régime forcé),
- La résistance dissipe l'énergie électrique sous forme thermique,
- Dans le cas du régime pseudo-périodique, il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Energie stockée dans le condensateur : $E_C = \frac{1}{2}Cu^2$

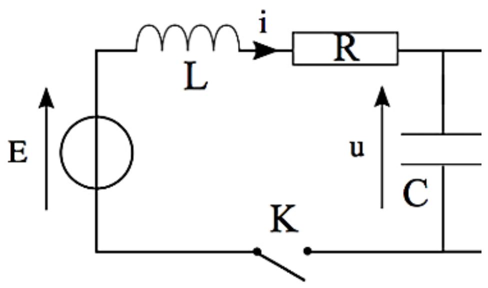
Energie stockée dans la bobine : $E_L = \frac{1}{2}Li^2$

⇨ Voir points de stockage d'énergie sur portait de phase

III)2) Modélisation et mise en équation

Tous les dipôles sont supposés idéaux.

Ils sont **en série** c'est-à-dire traversés par le même courant ***i***.



Relations entre tensions et intensité :

Loi des mailles :

Equation différentielle vérifiée par u_C :

Forme canonique de l'équation différentielle :

Sous forme canonique, l'équation différentielle du second ordre s'écrit :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt}(t) + {\omega_0}^2 u_C(t) = {\omega_0}^2 e(t)$$

Avec : ω_0 pulsation propre (rad.s^{-1})

Q facteur de qualité (sans dimension)

Identification :

Remarque : la forme canonique est parfois écrite sous la forme :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{du_c}{dt} + {\omega_0}^2 u_C = {\omega_0}^2 e$$

où $\xi = \frac{1}{2Q}$ est appelé

Le régime transitoire dépend de la valeur de Q (donc de ξ) :

- Si le facteur de qualité Q est grand devant 1 (facteur d'amortissement ξ petit devant 1),

- Si Q tend vers l'infini (ξ tend vers zéro),

- Si Q est très petit devant 1 (ξ très grand devant 1),

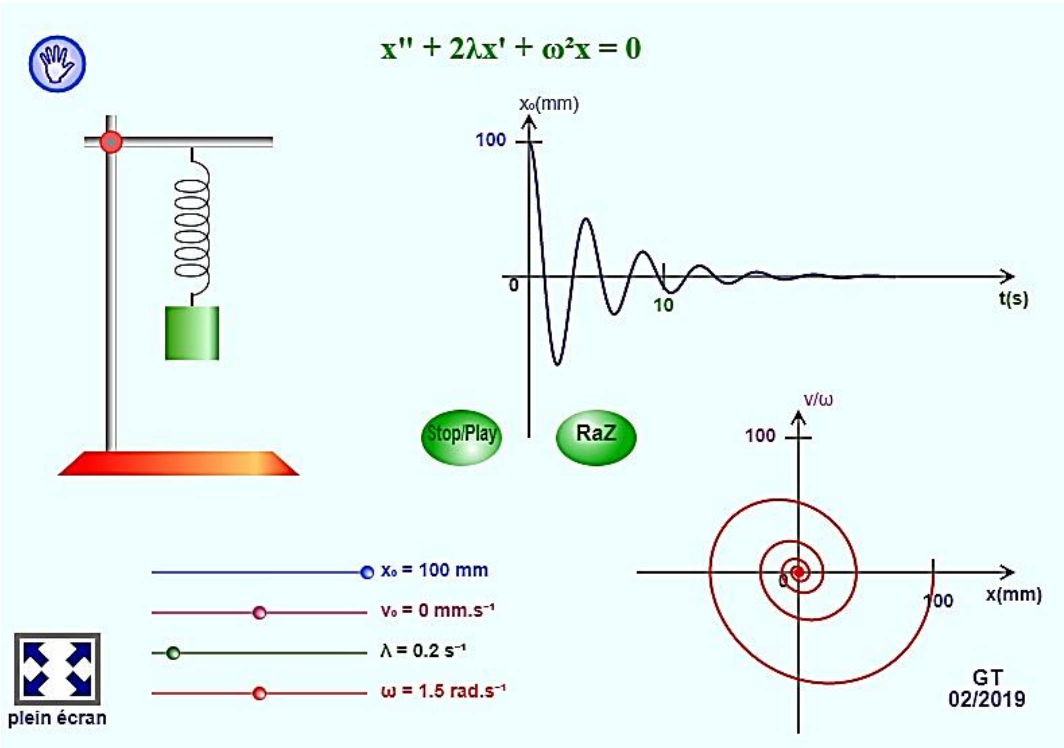
IV) EXEMPLE D'OSCILLATEUR MECANIQUE AMORTI : LE SYSTEME MASSE – RESSORT AVEC FROTTEMENT

IV)1) Expérience

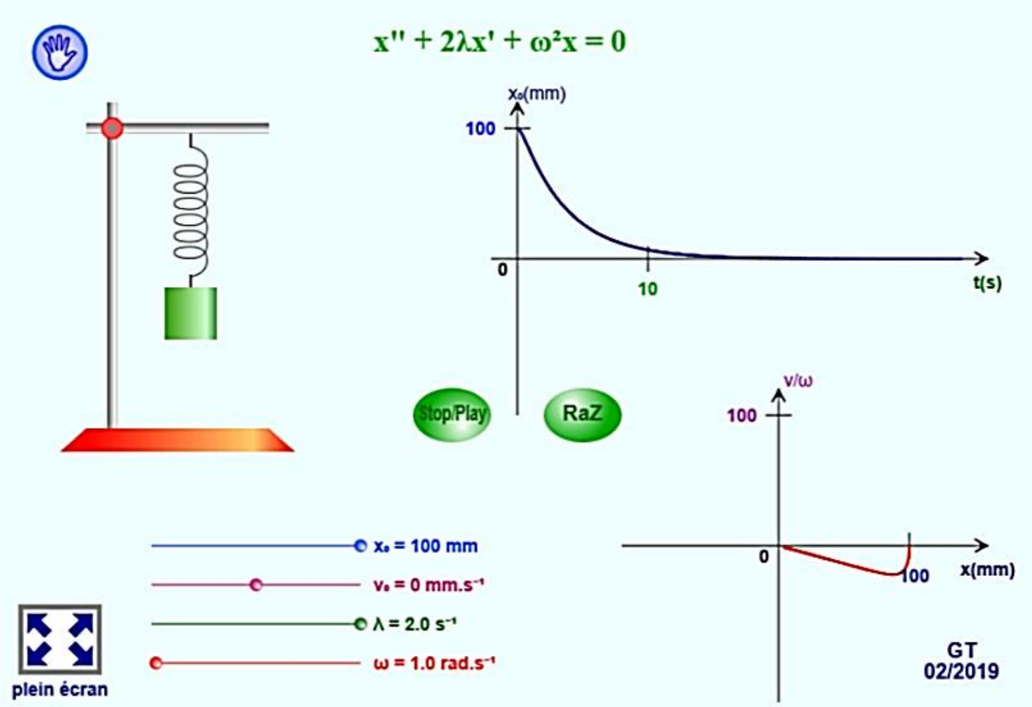
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php?typanim=Javascript

Sur un système masse-ressort, on écarte la masse de sa position d'équilibre. On réalise l'acquisition de la position de la masse en fonction du temps.

Régime

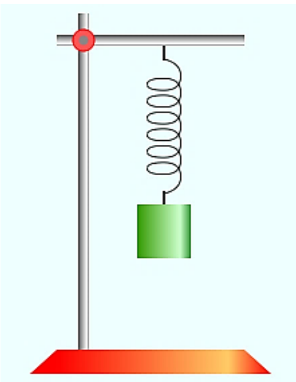


Régime



IV)2) Modélisation et mise en équation

Système masse-ressort avec « frottement visqueux ».



Référentiel :

Système :

BAME :

PFD :

Equation différentielle vérifiée par *z* :

Forme canonique de l'équation différentielle :

Identification :

ANALOGIES MECANIQUE – ELECTRICITE :

Mécanique	**Electricité**
Position x (m)	Charge q (C)
Vitesse v ($m.s^{-1}$)	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k ($N.m^{-1}$)	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h ($N.m^{-1}.s$)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)
Energie potentielle $E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$ (J)	

Energie cinétique $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ (J)	
Pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$ (rad.s^{-1})	
Facteur de qualité $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$ (sans dimension)	

V) RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU DEUXIEME ORDRE

Revenons sur l'équation différentielle vérifiée par la tension $\boldsymbol{u_C}$ dans le cas d'un circuit RLC série en réponse à un échelon de tension :

$$\boldsymbol{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + {\omega_0}^2 u_C = {\omega_0}^2 E} \qquad \text{pour } t > 0$$

<u>Remarque :</u> La méthode de résolution est la même en mécanique, où la tension $\boldsymbol{u_C}$ est remplacée par la position ***x*** ou ***z***.

V)1) Forme générale des solutions

Solution particulière (SP) :

Solution de l'équation homogène (SEH) :

Les solutions de l'équation homogène sont déterminées à partir de **l'équation caractéristique**.

Equation homogène :

⇨ **Equation caractéristique :**

La forme de la solution et donc le type de régime (pseudo-périodique, apériodique ou critique) dépend du **signe du discriminant *Δ* de l'équation caractéristique**.

3 cas sont possibles :

- $\Delta > 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta < 0$

V)2) Régime apériodique

Le régime apériodique est obtenu lorsque

L'amortissement est , le facteur de qualité est

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est

L'équation caractéristique admet 2 racines réelles :

En régime apériodique, les **solutions de l'équation homogène (SEH)** prennent la forme suivante :

Durée du régime transitoire

Les racines r_1 et r_2 sont négatives. Les 2 exponentielles de la solution sont donc décroissantes, avec des temps caractéristiques $\tau_{1,2} = \frac{1}{|r_{1,2}|}$. La durée τ du régime transitoire est définie comme le minimum de $\tau_1 = \frac{1}{|r_1|}$ et $\tau_2 = \frac{1}{|r_2|}$.

V)3) Régime pseudo-périodique

Le régime pseudo-périodique est obtenu lorsque

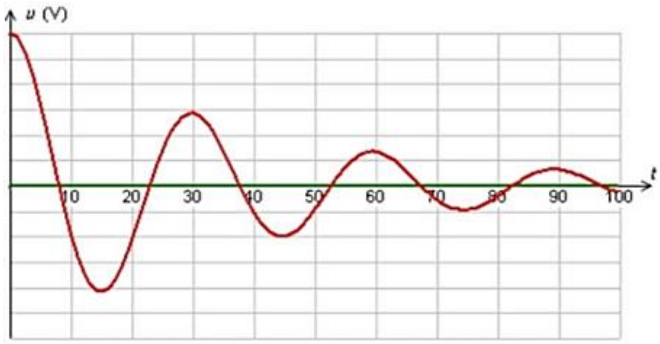
L'amortissement est , le facteur de qualité est

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est

L'équation caractéristique admet 2 racines complexes cojuguées :

En régime pseudo-périodique, les **solutions de l'équation homogène (SEH)** prennent la forme suivante :

Allure de la solution de l'équation homogène



Durée du régime transitoire

La durée τ du régime transitoire est déterminée à partir de l'enveloppe exponentielle :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

La durée du régime transitoire est d'autant plus longue que Q est élevé.

Si on compare la durée du régime transitoire τ à la pseudo-période T :

V)4) Régime apériodique critique

Le régime critique est obtenu lorsque

L'équation caractéristique admet 1 racine réelle double :

En régime critique, les **solutions de l'équation homogène (SEH)** prennent la forme suivante :

Durée du régime transitoire :

GENERALISATION :

<u>Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti)</u>

Formes canoniques :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$

avec ***Q*** facteur de qualité, ***ω₀*** pulsation propre

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$

avec $\xi = \frac{1}{2Q}$ facteur d'amortissement

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$

avec $\lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$

Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$

Discriminant : $\Delta = {\omega_0}^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$ => 2 racines r_1 et r_2

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q < ½	ξ > 1	Δ > 0	2 racines réelles négatives $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$	Apériodique	$y(t) = SP + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
Q = ½	ξ = 1	Δ = 0	1 racine double r = $-\omega_0$	Critique	$y(t) = SP + (At + B)e^{-\omega_0 t}$
Q > ½	ξ < 1	Δ < 0	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2} = -\lambda +/_- j\omega$	Pseudo-périodique	$y(t) = SP + [Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)]e^{-\lambda t}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(0)$.

<u>Décrément logarithmique</u>

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

$$\delta = \ln\left[\frac{y(t) - y(\infty)}{y(t+T) - y(\infty)}\right] = ln\left[\frac{1}{e^{-\lambda T}}\right] = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q}T$$

avec *y(t)* et *y(t+T)* valeurs de 2 « maxima » successifs