CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 7 (11 au 16 novembre 2024)

LES COLLES DU LUNDI 11 NOVEMBRE DOIVENT ÊTRE RATTRAPEES : CONTACTER VOTRE COLLEUR.

Chapitres étudiés et questions de cours : Systèmes du premier ordre ; Oscillateurs harmoniques (non amortis uniquement)

2 questions de cours par étudiant : 1 question de cours (parmi les questions 1 à 8), 1 « démo » (parmi les questions 9 à 18).

Réponses attendues en bleu.

Questions de cours :

1) Donner les expressions des forces suivantes : poids, force de rappel élastique, force de frottement fluide, poussée d'Archimède.

Poids : $\vec{P} = \vec{F}_{Terre \to m} = m.\vec{g}$

P poids en newtons (N)

m masse en kilogrammes (kg)

g accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

Force de rappel élastique : $\vec{T} = -k.(l - l_0).\vec{u_x} = -k.x.\vec{u_x}$

T en newtons (N)

k = raideur du ressort (N.m^{-1})

x = allongement du ressort : $x = l - l_0$ (m)

$\vec{u_x}$: vecteur unitaire sortant du ressort

Force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$

f en newtons (N)

h coefficient de frottement fluide (kg.s^{-1})

v : vitesse du point matériel (m.s^{-1})

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$$\vec{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \vec{u_z} \text{ (pour un axe } z \text{ orienté vers le bas)}$$

2) Donner les expressions du travail d'une force + unités.

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$\boldsymbol{\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}}$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B :

$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$

3) Donner la définition de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\boldsymbol{E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m {v_{M/R}}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}}$$

4) Donner la définition de l'énergie potentielle, ainsi que les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle E_P** :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)}$$

Ou, sous forme infinitésimale :

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) = -dE_P}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le bas :

$$\boldsymbol{E_{PP} = - mgz + cte'}$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique $E_{P\,él}$ dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}}$ exercée par un ressort de raideur *k* :

$$\boldsymbol{E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \Rightarrow \overrightarrow{F_{él}} = -k.x.\overrightarrow{u_x}} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

5) Donner la définition de l'énergie mécanique et du théorème de l'énergie mécanique.

Energie mécanique d'un point matériel :

$$E_m = E_C + E_P$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})$$

6) Définitions des positions d'équilibre stable et instable à partir de l'énergie potentielle.

Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0$$

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0$$

7) Donner la forme canonique de l'équation différentielle du premier ordre pour la fonction $y(t)$, ainsi que la forme générale de sa solution :

Forme canonique : $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = cte$ avec τ constante de temps

Solution : $y(t) = SP + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

K déterminée à partir de la condition initiale, en général y(0)

8) Donner la forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre pour la fonction $y(t)$ (cas de l'oscillateur harmonique non amorti), ainsi que la forme générale de sa solution :

Forme canonique : $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0{}^2 y = cte$ avec ω_0 pulsation propre

Solution : $y(t) = SP + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Xm et φ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général y(0) et $\frac{dy}{dt}(0)$

ou

Solution : $y(t) = SP + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général y(0) et $\frac{dy}{dt}(0)$

Démos de cours :

9) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. A partir du PFD, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

BAME :

$\vec{P} = mg\vec{u_z}$ (axe *z* orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_{M/R}} = -h\vec{v} = -hv\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext\ sur\ M}} = \left(\frac{d\overrightarrow{p_{M\,/\,R}}}{dt}\right) = \boldsymbol{m}.\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{M\,/\,R}}$

$\vec{P} + \cancel{\overrightarrow{\Pi_a}} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - h\vec{v} = m\vec{a}$

$mg\overrightarrow{u_z} - hv\overrightarrow{u_z} = m\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_z}$

Projection sur $\overrightarrow{u_z}$:

$mg - hv = m\frac{dv}{dt}$

Ou : $m\frac{dv}{dt} + hv = mg$

En considérant $m \neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g}}$

Forme canonique standard :

$\boxed{\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y(t)}}{\mathbf{dt}} + \frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{y(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\tau}\boldsymbol{h(t)}}$

Par identification : $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$

10) Bille de masse m lâchée dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et subissant une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. A partir du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation différentielle de la vitesse de la bille ; la mettre sous forme canonique, identifier la constante de temps τ.

Force conservative : $\vec{P} = mg\overrightarrow{u_z}$, associée à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = -mgz + cte$ (axe z orienté vers la bas)

Poussée d'Archimède négligée

Force non conservative : force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_{M/R}} = -h\vec{v}$ dont la puissance est $P_{non\ cons} = \vec{f}.\vec{v} = -h\vec{v}.\vec{v} = -hv^2$

Energie cinétique de la bille : $E_{c,M/R} = \frac{1}{2}m{v_{M/R}}^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Théorème de l'énergie mécanique :

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = \sum P_{non\ cons}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -hv^2$

$m\frac{dv}{dt}v - mgv = -hv^2$

Ou : $v\left(m\frac{dv}{dt} + hv\right) = vmg$

En considérant $v \neq 0$, on obtient :

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} + hv = mg}$$

En considérant $m \neq 0$, et en divisant par m, on obtient, sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g}}$

Forme canonique standard :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}h(t)}}$$

Par identification : $\boldsymbol{\tau = \frac{m}{h}}$

11) Résoudre l'équation différentielle suivante, compte tenu de la condition initiale $v(0) = 0$:

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}v(t) = g}$$

a) Solution de l'équation différentielle homogène (SEH) :

$\boldsymbol{v_H(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$ où A est une constante qui sera déterminée à partir des conditions initiales.

b) **Solution particulière (SP)** de l'équation différentielle = une solution simple de l'équation différentielle, de même forme que le second membre.

$\boldsymbol{v_P(t) = \tau g = \frac{mg}{h}}$ est solution de l'équation différentielle.

c) **Solution générale (SG)** = somme de la solution de l'équation différentielle homogène (SEH) et de la solution particulière (SP).
SG = SEH + SP

$$\boldsymbol{v_G(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{mg}{h}}$$

d) **Condition(s) initiale(s)** (CI) : La connaissance de $v(0)$ ou bien $\frac{dv}{dt}(0)$ est nécessaire pour déterminer *la* **solution physique *unique***.

Considérons que la bille est lâchée sans vitesse initiale, on a donc : $\boldsymbol{v(0) = 0}$.

e) Détermination de la **constante d'intégration A** à partir des conditions initiales.

Physiquement : $v(0) = 0$

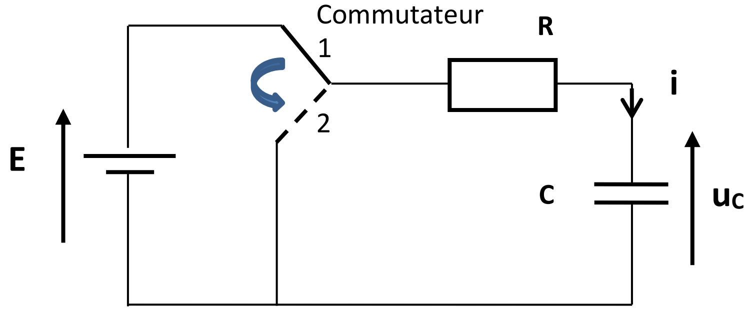
Mathématiquement : $v(t) = v_G(t) = Ae^0 + \frac{mg}{h} = A + \frac{mg}{h}$

On en déduit : $0 = A + \frac{mg}{h}$ ou encore $\boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{h}}$

Conclusion : la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$\boldsymbol{v(t)} = -\frac{mg}{h}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{mg}{h} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{h}}\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

12) Montage :



Commutateur en **position 1** : Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{u_C(t)}$ et la mettre sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle compte-tenu de la condition initiale $u_C(0) = 0$.

Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_C = 0$

Appliquer la loi entre *u* et *i* pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$, d'où :

$$E - RC\frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = RC$.

SEH : $u_{CH} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

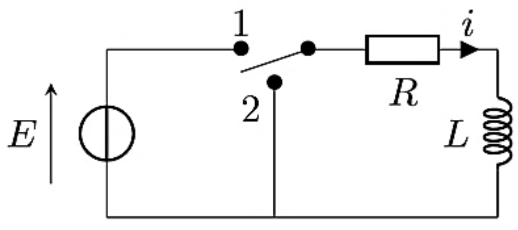
SP : $u_{CP} = E$

SG : $u_C = u_{CH} + u_{CP} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

CI : Physiquement : $u_C(0) = u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité ; le condensateur est initialement déchargé). Mathématiquement : $u_C(0) = A + E$ d'où : $A = -E$

Solution : $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

13) Montage :



Le commutateur est en **position 1** et permet la **magnétisation de la bobine**. Etablir l'équation différentielle vérifiée par *i(t). Mettre* cette équation différentielle sous forme canonique. Identifier la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale suivante : A t = 0, la bobine est démagnétisée, c'est-à-dire que le courant la traversant est nul.

Appliquer la loi des mailles : $E - u_R - u_L = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_R = R.i$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$, d'où :

$$E - R.i\ - L\frac{di}{dt} = 0$$

On obtient sous forme canonique :

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$

On identifie la constante de temps de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

SEH : $i_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

SP : $i_P = \frac{E}{R}$

SG : $i = i_H + i_P = \ Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

CI : Physiquement : $i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 0$ (le courant dans une bobine ne peut pas subir de discontinuité ; la bobine est initialement démagnétisée). Mathématiquement : $i(0) = A + \frac{E}{R}$ d'où : $A = \ -\frac{E}{R}$

Solution : $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

14) Donner les analogies mécanique – électricité.

Mécanique	**Electricité**
Position *x* (m)	Charge *q* (C)
Vitesse *v* (m.s^{-1})	Intensité *i* (A)
Masse *m* (kg)	Inductance *L* (H)
Raideur *k* (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité *C* (F)
Frottement *h* (N.m^{-1}.s)	Résistance *R* (Ω)
Force *F* (N)	Tension *u* (V)

15) Une maison subit, pendant une durée dt, des pertes thermiques à travers mur et toit d'expression :

$$\delta Q_{pertes} = K\ (T(t) - T_0)\ dt$$

où $T(t)$ est la température intérieure, T_0 la température extérieure et K un facteur constant.

Le chauffage de la maison est coupé à l'instant $t = 0$, on note T_1 la température initiale, on suppose T_0 constante. $T_1 > T_0$.

1. Quelle va être la température finale de la maison ?

On note C_{maison} la capacité thermique totale de l'habitation.

2. Réaliser un bilan énergétique pour la maison sur une durée infinitésimale dt. En déduire l'équation différentielle liant T et t.

3. Déterminer l'évolution $T(t)$ de la température intérieure au cours du temps.

1. Si le chauffage est coupé, la température baisse à cause des pertes thermiques vers l'extérieur, jusqu'à avoir la même température dehors et dedans (équilibre thermique)

$$\boldsymbol{T_f = \lim_{t\to\infty} T = T_0}$$

2. Bilan énergétique entre t et $t + dt$, alors que la température de la maison passe de T à $T + dT$ (avec $dT < 0$)

L'énergie mécanique de la maison ne varie pas.

La transformation ayant lieu à pression atmosphérique, le premier principe appliqué à la maison entre t et $t + dt$:

$$dH \underbrace{=}_{isobare} \delta Q_{reçu\ par\ la\ maison} = -\boldsymbol{\delta Q_{pertes}}$$

La variation d'enthalpie entre t et $t + dt$ est :

$$dH = C_{maison}\ (T + dT - T) = C_{maison}\ dT$$

d'où $C_{maison}\ dT = -K\ (T(t) - T_0)\ dt$ soit $C_{maison}\ \frac{dT}{dt} + K\ (T(t) - T_0) = 0$ ou encore

$C_{maison}\ \frac{dT}{dt} + KT(t) = KT_0$ L'équation différentielle liant T et t peut s'écrire

$$\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C_{maison}} T(t) = \frac{K}{C_{maison}} T_0$$

3. Résolution : On identifie la constante de temps du problème : $\tau = \frac{C_{maison}}{K}$

L'équation est alors $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T(t) = \frac{1}{\tau} T_0$

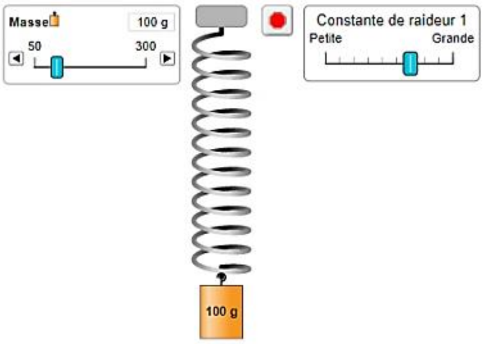
La solution générale de cette équation est $T(t) = T_0 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

À l'instant initial, $T(t = 0) = T_1 = T_0 + A$ d'où $A = T_1 - T_0$

La température intérieure de la maison est donnée par : $\boldsymbol{T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Avec $\boldsymbol{\tau = \frac{C_{maison}}{K}}$

16) Système masse-ressort vertical : A partir du PFS, établir l'expression de la longueur à l'équilibre.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse *m* supposée ponctuelle

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe *z* orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ c'est-à-dire $mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

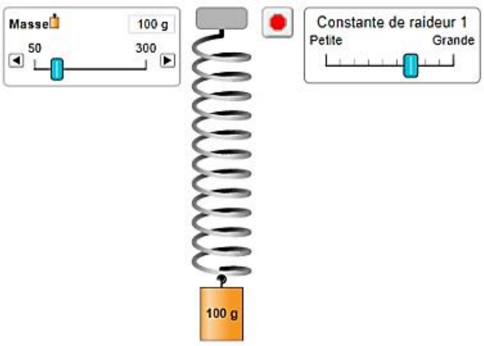
Détermination de la longueur du ressort à l'équilibre $\boldsymbol{l_{eq}}$:

En projetant sur l'axe *z* :

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z} = 0$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}}$

17) Système masse-ressort vertical : A partir du PFD, établir l'expression de l'équation différentielle du mouvement.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse *m* supposée ponctuelle

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe *z* orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ c'est-à-dire $mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

En projetant sur l'axe *z* :

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z}$

Equation différentielle vérifiée par la position $\boldsymbol{z = l - l_{eq}}$:

$mg - k\left(l - l_{eq} + l_{eq} - l_0\right) = m\ddot{z}$

Avec : $mg - k\left(l_{eq} - l_0\right) = 0$ (Equilibre)

On obtient : $-k\left(l - l_{eq}\right) = -kz = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$

D'où : $\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0}$ Equation différentielle linéaire d'ordre à coefficients constants

$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + {\omega_0}^2\, z = 0}$ Forme canonique

18) Résoudre l'équation différentielle homogène (SEH) de la fonction $z(t)$ suivante :

$$\frac{d^2z}{dt^2}(t) + {\omega_0}^2 z(t) = 0$$

On donne les 2 conditions initiales :

$z(0) = z(t = 0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t = 0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

a) Solution de l'équation homogène (SEH) : $z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)\ \ ou\ \ A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

b) Solution particulière (SP) : Ici : $z_P(t) = 0$

c) Solution générale (SG) : $z(t) = z_H(t) + z_P(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)\ \ ou\ \ A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

d) Conditions initiales (CI) : 2 conditions initiales sont nécessaires

$z(0) = z(t = 0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t = 0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

e) Détermination des constantes d'intégration :

$z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)\ ou\ \ A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$\dot{z}(t) = -\omega_0 Z_m \sin(\omega_0 t + \varphi)\ ou\ -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$

$z(0) = Z_m \cos(\varphi)\ ou\ A\ \ math\acute{e}matiquement\ et\ \ z(0) = Z_0\ \ physiquement$

$\dot{z}(0) = -\omega_0 Z_m \sin(\varphi)\ ou\ \omega_0 B\ \ math\acute{e}matiquement\ et\ \dot{z}(0) = 0\ \ physiquement$

On en déduit : En prenant $\varphi = 0$, on obtient $Z_m = Z_0$

Ou : $A = Z_0,\ B = 0$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives. Étudier un système modélisé par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ; interprétation qualitative du temps caractéristique. Exploiter numériquement une interaction dissipative amenant à une équation différentielle linéaire ou non linéaire.

4. Oscillations libres	
Interprétation avec le graphe de l'énergie potentielle	Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
Oscillateur non amorti	Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique. Étude expérimentale d'un oscillateur harmonique.