M4 OSCILLATEUR HARMONIQUE

Travaux Dirigés (1)

Exercice 1 : Détermination expérimentale des caractéristiques du mouvement

(sans calculatrice) *On donne* $\pi^2 \approx 10$.

Un objet attaché à un ressort vibre avec un mouvement harmonique simple décrit par la figure ci-contre.

Déterminer pour ce mouvement :

(a) l'amplitude,

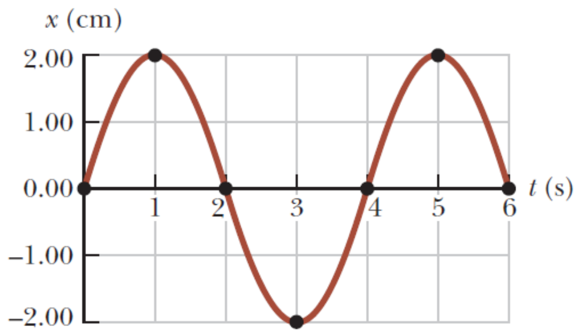
(b) la période,

(c) la pulsation,

(d) la vitesse maximale,

(e) l'accélération maximale,

(f) une équation pour la position $x(t)$ en fonction du temps.



(a) Amplitude : $X_m = 2$ cm

(b) Période : $T = 4$ s

(c) Pulsation : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\times 3{,}14}{4} = 1{,}57$ rad.s-1

(d) $v_{max} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{max} = \dfrac{dx}{dt}(0) = 4$ cm.s-1 à confirmer

(e) a_{max} ?

(f) $x(t) = X_m \sin(\omega t) = 2.10^{-2} \sin(1{,}57t)$

d'où :

$\dot{x}(t) = \omega X_m \cos(\omega t) = 3{,}14.10^{-2} \cos(1{,}57t)$

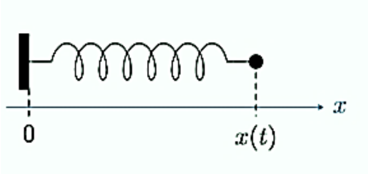
$\Rightarrow \underline{\dot{x}_{max} = 3{,}14 \text{ cm.s}^{-1}} = v_{max}$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \sin(\omega t) = -5.10^{-2} \sin(1{,}57t)$.

$\Rightarrow \underline{\ddot{x}_{max} = 5 \text{ cm.s}^{-2}}$

Exercice 2 : Oscillateur masse-ressort horizontal

On considère un système masse-ressort horizontal.



Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse *m*. La constante de raideur du ressort vaut *k*, sa longueur à vide vaut l_0.

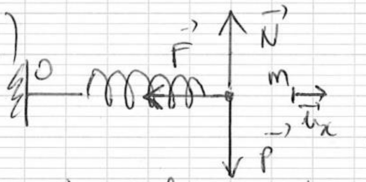
Le système évolue sans frottement sur un plan horizontal.

1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse *m*. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par *x(t).* Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre ω_0 du système.
3) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle précédente.
4) On donne les conditions initiales : $x(0) = X_1$; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes *A* et *B*. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de *x* en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

Exercice 1 : ressort horizontal

$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$ (Pas de mouvement vertical)

1)



$\vec{P}$: poids
$\vec{N}$: réaction du plan
$\vec{F}$: force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$$

2) PFD : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \Sigma \vec{F}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0).$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$$

3)
$$x(t) = X_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2\sin(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right).$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_0 + A\omega_0^2\cos(\omega_0 t) + B\omega_0^2\sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 = \omega_0^2 l_0$$

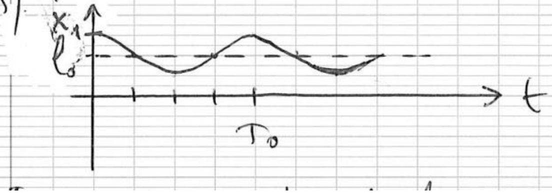
si $X_0 = l_0$

4)
$$x(0) = l_0 + A = X_1 \Rightarrow A = (X_1 - l_0)$$
$$\dot{x}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Solution :

$$x(t) = l_0 + (X_1 - l_0)\cos(\omega_0 t).$$

5)



Amplitude : $X_1 - l_0$ (si $X_1 > l_0$)

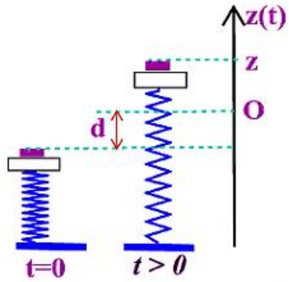
Exercice 3 : Oscillateur masse-ressort vertical

On considère un système masse-ressort maintenu verticalement par un dispositif dont on néglige les effets.

Le solide attaché à l'extrémité du ressort est modélisé par un point matériel de masse m. La constante de raideur du ressort vaut k, sa longueur à vide vaut l_0.

Le système évolue sans frottement.

La position $z = 0$ correspond à la longueur à vide du ressort.

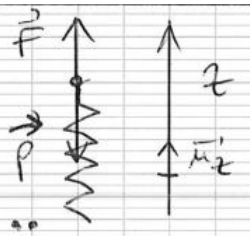


1) Faire le bilan des forces appliquées sur la masse m. Les représenter sur un schéma.
2) En appliquant le PFD, établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Mettre l'équation sous forme canonique. Déterminer la pulsation propre ω_0 du système.

On donne la solution générale de l'équation différentielle : $z(t) = A + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3) Montrer que cette expression est bien solution de l'équation du mouvement, si A a une valeur particulière. A quoi correspond cette valeur de A ?
4) On donne les conditions initiales : $z(0) = Z_0$; $v(0) = 0$. Déterminer les constantes A et B. Donner la solution physique de l'équation de mouvement.
5) Tracer l'évolution de z en fonction du temps. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

1)



$\vec{P}$: poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$

$\vec{F}$: Force de rappel élastique

$\vec{F} = -kz\vec{u}_z$

2) $m\ddot{z} = -mg - kz$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = -g.$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3) $z(t) = A + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega_0^2 B\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \omega_0^2 z &= -\omega_0^2 B\cos(\omega_0 t + \varphi) + A\omega_0^2 + B\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)\\ &= A\omega_0^2\\ &= -g.\end{aligned}$$

$$A\frac{k}{m} = -g \Rightarrow A = -\frac{mg}{k}$$

A correspond à la valeur de z à l'équilibre.

A l'équilibre :

$$z_{eq} = -\frac{mg}{k}$$

$$\ell = \ell_0 + z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

Ressort comprimé !

4) $\begin{cases} z(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{mg}{k} \\ \dot{z}(t) = -B\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$

$$\begin{cases} z(0) = z_0 = B\cos\varphi - \frac{mg}{k} \Rightarrow B = z_0 + \frac{mg}{k} \\ \dot{z}(0) = 0 = -B\omega_0 \sin\varphi \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

Solution :

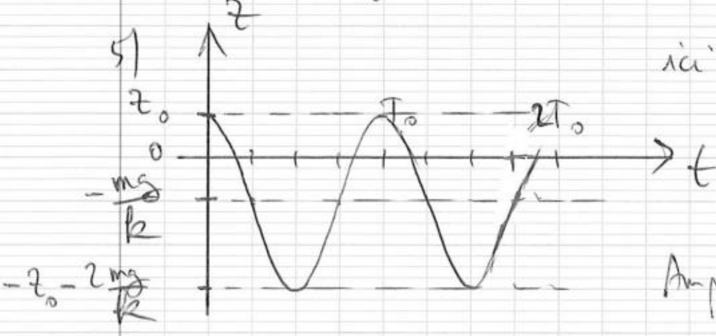
$$z(t) = -\frac{mg}{k} + \left(z_0 + \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega_0 t).$$

Vérif : $z(0) = z_0$.

$$\dot z(t) = -\omega_0\left(z_0 + \frac{mg}{k}\right)\sin(\omega_0 t)$$

$$\dot z(0) = 0$$

5)



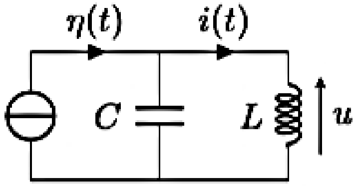
ici : $z_0 > -\frac{mg}{k}$

Amplitude : $z_0 + \frac{mg}{k}$

Exercice 4 : Etude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

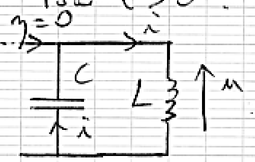
Dans le circuit représenté ci-contre, le générateur de courant, supposé idéal, est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant $\eta(t)$, passant de I_0 à 0 à l'instant t = 0. On note $E_{TOT} = E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1) Exprimer la dérivée $\frac{dE_{TOT}}{dt}$ en fonction de i et $\frac{di}{dt}$.
2) Justifier qualitativement que E_{TOT} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i. La mettre sous forme canonique $\frac{d^2i}{dt^2} + {\omega_0}^2 i = 0$; donner l'expression de la pulsation propre ω_0. Retrouver cette équation différentielle en appliquant les lois de Kirchoff.
3) A partir de considérations physiques, établir les conditions initiales $i(0)$ et $\frac{di}{dt}(0)$.
4) En déduire l'expression de $i(t)$.



1. $E_{tot} = E_c + E_L$

Pour $t \geq 0$:



$E_{tot} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$

$u = L\frac{di}{dt}$

$\left(i = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{i}{C} \right) \to$ utilisé au 2.

$\frac{dE_{tot}}{dt} = Cu\frac{du}{dt} + Li\frac{di}{dt}$

$= CL\frac{di}{dt}L\frac{d^2i}{dt^2} + Li\frac{di}{dt}$

$\frac{dE_{tot}}{dt} = L\frac{di}{dt}\left(LC\frac{d^2i}{dt^2} + i\right) \quad (1)$

2. E_{tot} est constante car il n'y a pas de pertes joule.

$(1) \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ faux

ou

$LC\frac{d^2i}{dt^2} + i = 0$

$\frac{d^2i}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} i = 0$

Par les lois de Kirchoff :

$u = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2}$

$i = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow i = -CL\frac{d^2i}{dt^2}$

On retrouve :

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + i = 0$$

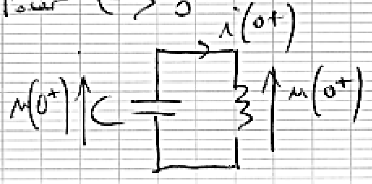
3. Pour $t < 0$:

$i(0^-) = \eta(0^-) = I_0$ (car bobine)

$\Rightarrow i(0^+) = i(0^-) = I_0.$

$u(0^-) = 0$

Pour $t > 0$



$u(0^+) = u(0^-)$ (car condensateur)

$u(0^+) = u(0^-) = 0$

$L\frac{di}{dt}(0^+) = 0$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = 0$$

4. $\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$

SG = SEH =

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{di}{dt}(t) = -\omega_0 I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(0^+) = I_m \cos\varphi = I_0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\omega_0 I_m \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $\varphi = 0$

$I_m = I_0$

d'où : $i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$

Exercice 5 : Résolution de l’équation différentielle de l’oscillateur harmonique

Soit un système M de masse m relié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l’aide de l’axe (Ox) où O représente le point d’attache du ressort. Par une étude énergétique, on obtient l’équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + kx = kl_0$$

Résoudre cette équation différentielle après l’avoir mise sous forme canonique pour l’une des conditions initiales suivantes :

a) Vitesse initiale nulle, position initiale x_0

b) Vitesse initiale v_0, élongation initiale nulle

c) Cas général : vitesse initiale v_0, position initiale x_0

Cette résolution sera faite avec une solution générale à l’équation homogène de la forme :

1) $\mathrm{x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$

2) $\mathrm{x_H(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

$m\ddot{x} + kx = k\ell_0$.

d'où :

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$ sous forme canonique.

ω_0

1) $x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$x_P = \ell_0$

d'où :

$x(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

a) $\dot{x}(0) = 0 \quad x(0) = x_0$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$

D'où :

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{Maths}} \ell_0 + A \underbrace{=}_{\text{CI}} x_0 \Rightarrow A = (x_0 - \ell_0)$$

$$\dot{x}(0) \underbrace{=}_{\text{Maths}} \omega_0 B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \Rightarrow B = 0$$

D'où :

$$\underline{x(t) = \ell_0 + (x_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t)}$$

b) $\dot{x}(0) = v_0 \quad x(0) = \ell_0$

D'où :

$$x(0) = \ell_0 + A = \ell_0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 B = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

D'où :

$$\underline{x(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

c) $\dot{x}(0) = v_0 \quad x(0) = x_0$

D'où :

$$x(0) = \ell_0 + A = x_0 \Rightarrow A = (x_0 - \ell_0)$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 B = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

D'où :

$$\underline{x(t) = \ell_0 + (x_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

2) $x_H(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x_P = \ell_0$

d'où :

$$x(t) = \ell_0 + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

a) $\dot{x}(0) = 0 \qquad x(0) = x_0$

D'où :

$$\underbrace{x(0) = \ell_0 + X_m \cos\varphi}_{\text{Maths}} = \underbrace{x_0}_{\text{CI}} \Rightarrow X_m = (x_0 - \ell_0)$$

$\cos\varphi = 1$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 X_m \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ par exemple}$$

D'où : $\underline{x(t) = \ell_0 + (x_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t)}$

b) $\dot{x}(0) = v_0 \qquad x(0) = \ell_0$

D'où :

$$x(0) = \ell_0 + X_m \cos\varphi = \ell_0$$
$$\Rightarrow X_m \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ par exemple}$$
$$\dot{x}(0) = -\omega_0 X_m \sin\varphi = v_0$$
$$\Rightarrow -\omega_0 X_m \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0$$
$$\Leftrightarrow -\omega_0 X_m = v_0$$
$$\Rightarrow X_m = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

D'où :

$$x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{x(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

c) $\dot{x}(0) = v_0 \qquad x(0) = x_0$

D'où :

$$\underbrace{x(0) = \ell_0 + X_m \cos\varphi}_{\text{Maths}} = \underbrace{x_0}_{\text{CI}} \Rightarrow X_m \cos\varphi = (x_0 - \ell_0) \quad (1)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 X_m \sin\varphi = v_0 \Rightarrow X_m \sin\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} : \quad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0(x_0 - \ell_0)}$$

$$(1)^2 + (2)^2 : \quad X_m^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = (x_0 - \ell_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

D'où : $X_m = \sqrt{(x_0-\ell_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

$$x(t) = \ell_0 + \sqrt{(x_0-\ell_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\cos\left(\omega_0 t + \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0(x_0-\ell_0)}\right)\right)$$

<u>Exercice 6 : Mobile lié par deux ressorts</u>

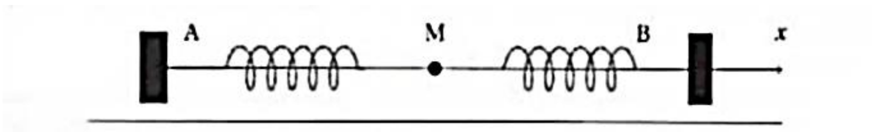
On considère un mobile supposé ponctuel de masse *m*, astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction *Ox*, et maintenu par deux ressorts identiques, de même raideur *k* et de même longueur au repos l_0, dont les extrémités sont fixées en deux points A et B (schéma page suivante).

Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$.

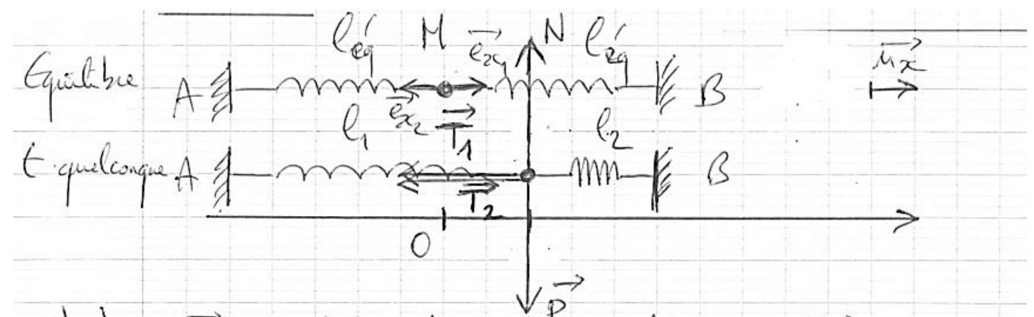
La position du point M est décrite par *x(t)*, écart par rapport à la position d'équilibre.

On néglige tout frottement.

A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0.



1) Exprimer les tensions exercées par les deux ressorts sur la masse, puis la tension totale.
2) Etablir l'équation différentielle dont *x(t)* est solution et montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre ω_0 et la période T_0, en fonction de *k* et *m*.
3) Déterminer l'expression de *x* en fonction de *t*, en tenant compte des conditions initiales.
4) L'énergie mécanique du système est-elle conservée ? Donner l'expression de l'énergie cinétique E_m du mobile, et en déduire celle de son énergie potentielle élastique $E_{pé}$.



1)2) | $\vec{e}_{x_1}$ Vecteur sortant du ressort 1. $\vec{e}_{x_1} = \vec{u}_x$
| $\vec{e}_{x_2}$ Vecteur sortant du ressort 2. $\vec{e}_{x_2} = -\vec{u}_x$

Bilan des forces :

$\vec{P}$, $\vec{T}$ | se compensent

$$\vec{T}_1 = -k(\ell_1-\ell_0)\vec{e}_{x_1} = -k(\ell_1-\ell_0)\vec{u}_x$$
$$\vec{T}_2 = -k(\ell_2-\ell_0)\vec{e}_{x_2} = +k(\ell_2-\ell_0)\vec{u}_x$$

PFD :

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$
$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$
$$-k(\ell_1-\ell_0)\vec{u}_x + k(\ell_2-\ell_0)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

ou

$$-k(\ell_1-\ell_{\text{éq}}+\ell_{\text{éq}}-\ell_0)\vec{u}_x + k(\ell_2-\ell_{\text{éq}}+\ell_{\text{éq}}-\ell_0)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

C'est à dire :

$$-k(\ell_1-\ell_{\text{éq}}+\ell_{\text{éq}}-\ell_0) + k(\ell_2-\ell_{\text{éq}}+\ell_{\text{éq}}-\ell_0) = m\ddot{x}$$
$$-k\underbrace{(\ell_1-\ell_{\text{éq}})}_{x} - \cancel{k(\ell_{\text{éq}}-\ell_0)} + k\underbrace{(\ell_2-\ell_{\text{éq}})}_{-x} + \cancel{k(\ell_{\text{éq}}-\ell_0)} = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x} \qquad \boxed{\ddot{x} + \overbrace{\frac{2k}{m}}^{\omega_0^2}x = 0}$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ $\qquad T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

3) SEH = SG (pas de second membre ici) :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

A $t=0$, $x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) - B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

D'où : Mathématiquement :

$$\begin{cases} x(0) = A \\ \dot{x}(0) = -B\omega_0 . \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 & \Rightarrow A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -B\omega_0 = 0 & \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Solution :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

Le système est équivalent à une masse m accrochée à un seul ressort de raideur 2k.

4) $E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

d'où :

$$E_C = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

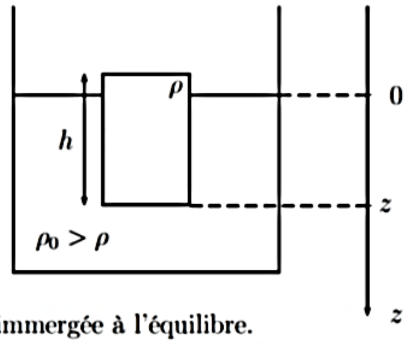
$E_{pé} = \frac{1}{2} . 2k . x^2$

d'où :

$E_{pé} = \frac{1}{\cancel{2}} . \cancel{2}k . x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$.

Exercice 7 : Immersion d'un cylindre

Un cylindre de section $s = 1\ \text{cm}^2$, de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique ρ) est placé dans l'eau (masse volumique ρ_0). Un système annexe, non représenté sur la figure, maintient son axe de révolution vertical.

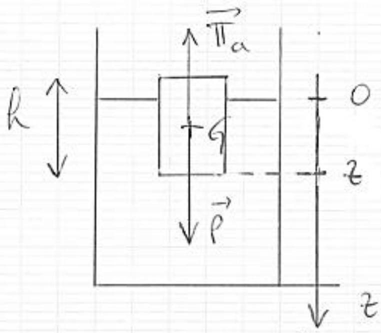


1. Déterminer z_0 la hauteur immergée à l'équilibre.
2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre. On note $\varepsilon = z - z_0$ l'écart par rapport à la position d'équilibre.

3. En appliquant le PFD au cylindre, établir l'équation différentielle du mouvement (équation différentielle vérifiée par ε). Montrer que la pulsation propre ω_0 peut s'écrire : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$. En déduire l'expression de la période propre T_0. Vérifier l'homogénéité du résultat (dimensions des grandeurs ω_0 et T_0).

Problème : Oscillation d'un bloc de glace dans l'eau



$m_{solide} = \rho_{solide} \cdot V_{solide} = \rho_{solide} S h$

$m_{liquide} = \rho_{liquide} \cdot V_{liq.\,déplacé}$
$= \rho_{liquide}\, S z$

PFD : $\vec{P} + \vec{\Pi}_a = m\vec{a}$

$$\rho_s \cancel{S} h g - \rho_\ell \cancel{S} z g = \rho_s \cancel{S} h \ddot{z}$$

D'où :

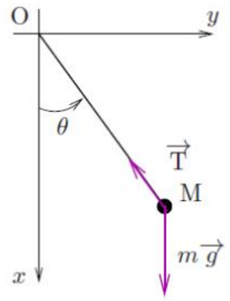
$$\ddot{z} + \underbrace{\left(\frac{\rho_e}{\rho_s}\frac{g}{h}\right)}_{\omega_0^2} z = g.$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{solide}\, h}{\rho_{liquide} \cdot g}}$$

Exercice 8 : Etude du pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à une tige rigide de masse supposée négligeable et de longueur ℓ.

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule simple à l'aide du théorème de la puissance mécanique.
2) Quelle est l'influence sur l'équation du choix de l'origine de l'énergie potentielle ?
3) Déterminer à l'aide de l'équation différentielle du mouvement les positions d'équilibre du pendule.
4) On limite la suite de l'étude au voisinage de la position d'équilibre stable : au voisinage de $\theta = 0$, on peut assimiler $\sin\theta$ et θ (attention, θ en radians !) : on prendra donc dans la suite $\sin\theta \approx \theta$. Simplifier l'équation différentielle au voisinage de l'équilibre ; commenter.
5) Définir la grandeur caractéristique de cet oscillateur.



Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur ℓ auquel est attachée une masse m assimilée à un point matériel M.
Les frottements de l'air sont négligés.

1) Les forces agissant sur le pendule sont :

- **Le poids $\vec{P}$** dérivant de l'énergie potentielle $Epp = -mgx + cte$
- **La tension $\vec{T}$** exercée par le fil, ne travaillant jamais (force conservative, pas d'énergie potentielle)

Les frottements et la poussée d'Archimède exercée par l'air sont négligés ; le système est conservatif.

$$Ep, tot = Epp = -mgx + cte$$

En projetant : $x = l\cos\theta$, soit

$$Ep, tot = Epp = -mgl\cos\theta + cte$$

En appliquant le théorème de la puissance mécanique au point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dEm}{dt} = P_{nc} = 0$$

Avec P_{nc} puissance des forces non conservatives (système conservatif d'énergie mécanique constante).

Energie cinétique : $Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

Energie mécanique : $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + cte$

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dEm}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$

$$\Leftrightarrow\ ml\dot{\theta}\big(l\ddot{\theta} + g\sin\theta\big) = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \\ ml\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse au mouvement de la bille, donc $\dot{\theta} \neq 0$

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants liant θ et t :

$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ (1)

2) La constante intervenant dans l'expression de l'énergie potentielle a une valeur fixée par le choix de l'origine des énergies potentielles. Elle disparait dans la dérivation de l'énergie mécanique lorsqu'on applique le théorème de la puissance mécanique et n'a donc aucune influence sur l'équation du mouvement.

3) Dans l'approximation des petits angles (approximation valable pour les angles inférieurs à 30°), on a **$\sin\theta \simeq \theta$** (pour des angles exprimés en radians) et l'équation précédente devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique**, de la forme :

$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ correspond à la pulsation propre du mouvement qui est sinusoïdal.

Les solutions sont de la forme : $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

La période T du mouvement est obtenue par la relation : $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, soit $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

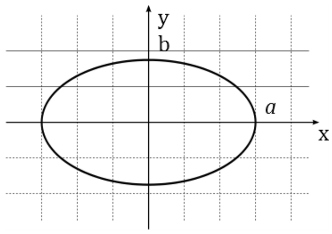
Exercice 9 : Portait de phase

Considérons un oscillateur harmonique d'équation horaire $x(t) = \boldsymbol{X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$; $\boldsymbol{X_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ sont supposées déterminées en fonction des conditions initiales.

Complément mathématique :

Si a et b sont deux constantes telles que $a > b > 0$, alors l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est celle d'une ellipse centrée sur O de demi grand-axe a et de demi petit-axe b.

Si r constante positive, alors l'équation $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ est celle d'un cercle centré sur O de rayon r.



1) Etablir l'expression de la vitesse et en déduire le rectangle du plan de phase dans lequel s'inscrit la trajectoire de phase étudiée.
2) Etablir l'expression de la trajectoire de phase (sous la forme $\dot{x} = f(x)$)le portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti et la représenter dans le plan de phase.
3) Etablir l'expression de l'énergie mécanique, et indiquer comment les trajectoires de phase évoluent lorsque l'énergie mécanique augmente.
4) À l'instant initial, l'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre stable de x_0 (avec $x_0 > 0$) et lâché sans vitesse initiale ($\dot{x}_0 = 0$). Placer le point M_{01} correspondant dans le plan de phase. Quel est le signe de $\dot{x}$ juste après qu'on lâche l'oscillateur ? En déduire le sens de parcours (qui peut être indiqué par une flèche).
5) À l'instant initial, l'oscillateur est à sa position d'équilibre stable ($x_0 = 0$) et on lui donne une vitesse initiale $\dot{x}_0$ (avec $\dot{x}_0 > 0$). Placer le point M_{02} correspondant. Quel est le signe de x lorsque l'oscillateur quitte sa position d'équilibre ? En déduire le sens de parcours.
6) Si un point représentatif d'une trajectoire de phase (quelconque) se trouve au-dessus de l'horizontale, que pouvez-vous affirmer ? En déduire le sens de parcours de la trajectoire.
7) On se place à présent dans le plan de phase $\frac{\dot{x}}{\omega_0} = f(x)$) ; que devient l'équation d'une trajectoire de phase quelconque ? quelle est alors son allure ?

$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

1) $\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

D'où : $x_{max} = X_m$, $x_{min} = -X_m$

$\dot{x}_{max} = \omega_0 X_m$, $\dot{x}_{min} = -\omega_0 X_m$

Rectangle :

Abscisses : largeur $2X_m$ / $\frac{1}{2}$ largeur X_m

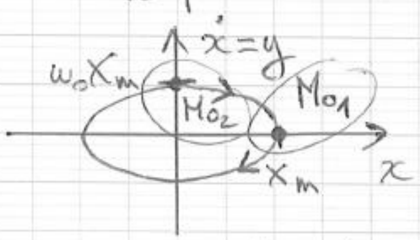
Ordonnées : Hauteur $2\omega_0 X_m$ / $\frac{1}{2}$ hauteur $\omega_0 X_m$

2) On peut écrire :

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{y^2}{(\omega_0 X_m)^2} = \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$$

$\Rightarrow$ Ellipse de 1/2 grand axe X_m

1/2 petit axe $\omega_0 X_m$



3) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

Si $E_m \nearrow$, alors l'ellipse $\nearrow$

4) $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\quad \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

CI : $x(0) = x_0 > 0$ $\quad \dot{x}(0) = 0$

$\underbrace{x(0)}_{\text{Maths}} = X_m \cos\varphi \underbrace{=}_{\text{CI}} x_0 \Rightarrow X_m = x_0$

et $\underbrace{\dot{x}(0)}_{\text{Maths}} = -\omega_0 X_m \sin\varphi \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\cos\varphi = 1$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.

$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)$.

Pour t "petit" : $\dot{x}(t) < 0 \Rightarrow$ sens $\rightarrow$

5) $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\quad \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi$

CI : $x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$

$x(0) = X_m \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\sin\varphi = 1$

$\dot{x}(0) = -\omega_0 X_m \sin\varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow X_m = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$

$x(t) = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$\dot{x}(t) = +\dot{x}_0 \sin(\omega_0 t)$

Pour t "petit" : $x(t) > 0 \Rightarrow$ sens $\rightarrow$

(même sens que précédemment

6) Sens $\rightarrow$.

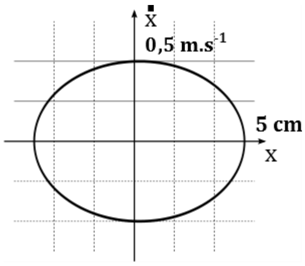
7) $\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 X_m)^2} = 1$ d'après Q1)2)

Ou : $\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2}{X_m^2} = 1$

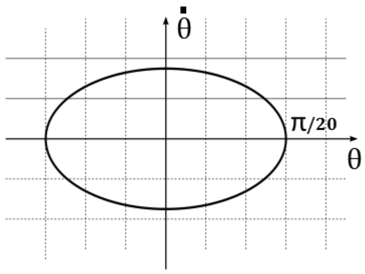
$\Rightarrow$ Cercle de rayon X_m

Exercice 10 : Lecture d'un diagramme de phase

On donne ci-dessous deux trajectoires de phase :



Trajectoire de phase d'un oscillateur horizontal, de masse $m = 50\ g$, dont la position est repérée sur un axe x'x.

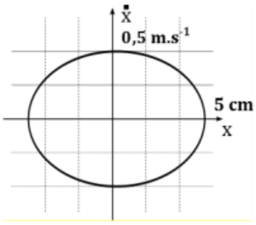


Trajectoire de phase d'un pendule simple, de longueur $L = 20\ cm$, de masse $m = 50\ g$, repéré par un angle θ.

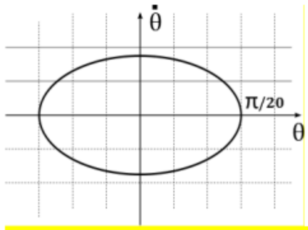
L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$. À partir de ces trajectoires de phase, déterminer :

1) La position d'équilibre de chacun des oscillateurs ainsi que la stabilité de ces positions
2) La vitesse maximale du pendule et l'énergie mécanique de chacun des oscillateurs
3) La raideur du ressort équivalent à l'oscillateur horizontal

1) Équilibres stables : les oscillations se font autour de la position d'équilibre stable, qui correspond nécessairement à un point de l'axe des abscisses (vitesse nulle à l'équilibre), soit ici positions d'équilibre en $x = 0$ et $\theta = 0$;



Trajectoire de phase d'un oscillateur horizontal, de masse $m = 50\ g$, dont la position est repérée sur un axe x'x.



Trajectoire de phase d'un pendule simple, de longueur $L = 20\ cm$, de masse $m = 50\ g$, repéré par un angle θ.

2) Vitesse du pendule : $v_2 = L\dot{\theta}$, d'où $v_{max,2} = L\dot{\theta}_{max}$

Avec θ de la forme $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, on a $\dot{\theta} = -\omega_0\theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

On a donc $\dot{\theta}_{max} = \omega_0\theta_m$ (la fonction sinus variant de -1 à 1).

Sur la trajectoire de phase représentée, on peut lire $\theta_m = \frac{\pi}{20}$.

De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx \sqrt{\frac{10}{0{,}2}} = \sqrt{\frac{100}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx \frac{10}{1{,}4} \approx \frac{100}{14} \approx \frac{50}{7} \approx 7$ rad.s^{-1}

$v_{max,2} = L\dot{\theta}_{max} = L\omega_0\theta_m = L\sqrt{\frac{g}{L}}\theta_m = \sqrt{gL}\theta_m = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{20} \approx 1{,}4 \times \frac{3{,}1}{20} \approx 14 \times \frac{3{,}1}{200} \approx 7 \times \frac{3{,}1}{100} \approx \frac{21{,}7}{100} \approx 0{,}22\ m.s^{-1}$;

De plus pour tous les oscillateurs harmoniques non amortis, $E_m = Ec + Ep = cte$; on peut donc la calculer au point le plus simple à exploiter.

Oscillateur 1 : point de vitesse maximale associée à une position nulle : $Ec = Ec_{max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{max}{}^2$ et $Ep = 0$ (en choisissant pour origine des énergies potentielles le point $x = 0$) ; Soit

$E_{m1} = Ec_{max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{max}{}^2 = \frac{1}{2} \times 50.10^{-3} \times 0{,}5^2 = \frac{1}{2} \times 5.10^{-2} \times \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 5.10^{-2} \times \frac{25}{100} = \frac{1}{2} \times 125.10^{-4} \approx 6{,}3\ mJ$;

Oscillateur 1 : point de $E_{m2} = 1{,}2\ mJ$

$k = 5\ kg.s^{-2}$.

Exercice 11 : Homogénéité et caractère harmonique

Vérifier l'homogénéité des équations ou équations différentielles suivantes (en proposant une correction le cas échéant), et pour chacune d'entre elles indiquer s'il s'agit ou pas d'une équation caractéristique d'un oscillateur harmonique simple.

a) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{k}{m}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k constante de raideur d'un ressort.

b) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{m}{k}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k constante de raideur d'un ressort, α coefficient de frottement tel que la force de frottement est $F = -\alpha v$, avec v vitesse.

c) $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{L}{g}\theta(t) = 0$ avec θ angle de rotation et L longueur d'un pendule, et g accélération de la pesanteur.

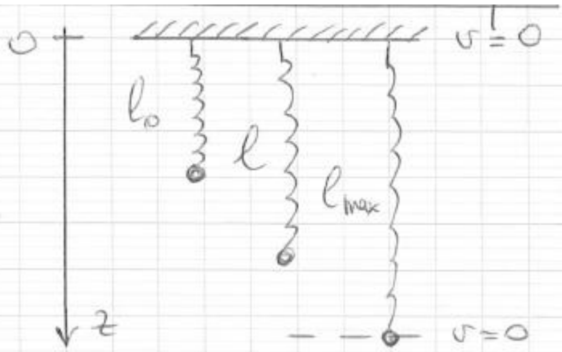
d) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{m}{k_1+k_2}x(t) = 0$ avec x déplacement, m masse et k_i constantes de raideur de ressorts.

e) $v(t) = \frac{L}{\omega} cos(2\pi f t)$ avec v vitesse, f fréquence, ω fréquence angulaire et L longueur.

Exercice 12 : Saut à l’élastique – résolution de problème

Comment choisir les caractéristiques d’un élastique pour que le saut se déroule dans des conditions de sécurité nécessaires au pont d’Aubry ?

Indications : déterminer les contraintes exercées au niveau du sauteur ; préciser les caractéristiques de l’élastique mises en jeu ; estimer les ordres de grandeur nécessaires ; modéliser le phénomène dans le cadre d’hypothèses simples.



BAME : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$

$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_z}$ (si $\ell \geq \ell_0$.)

(Pour $z \leq \ell_0$, $\vec{P}$ uniquement
Pour $z \geq \ell_0$, $\vec{P}$ et $\vec{F}$)

Les 2 forces sont conservatrices
$\Rightarrow$ Conservation de l'énergie mécanique

$\vec{P}$ associée à $-mgz + cte = E_{pp}$
$= -mgz$ en prenant $E_{pp} = 0$ pour $z = 0$

$\vec{F}$ associée à $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = E_{pe}$
$= \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m(0) = E_m(z_{max})$$

$$E_c(0) + E_{pp}(0) + \cancel{E_{pe}(0)} = E_c(z_{max}) + E_{pp}(z_{max}) + E_{pe}(z_{max})$$

$$0 + 0 + 0 = 0 - mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2$$

On détermine z_{max}

$$\frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 - mgz_{max} = 0$$

$$\frac{1}{2}kz_{max}^2 - k\ell_0 z_{max} + \frac{1}{2}k\ell_0^2 - mgz_{max} = 0$$

-

$$\frac{1}{2}k z_{max}^2 - (k\ell_0 + mg) z_{max} + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = 0$$

En divisant par $\frac{1}{2}k$:

$$z_{max}^2 - 2\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) z_{max} + \ell_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - 4\ell_0^2 > 0$$

$$z_{max} = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - 4\ell_0^2}$$

En gardant la valeur max :

$$z_{max} = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) + \sqrt{\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - \ell_0^2}$$

$$z_{max} = \ell_{eq} + \sqrt{\ell_{eq}^2 - \ell_0^2}$$

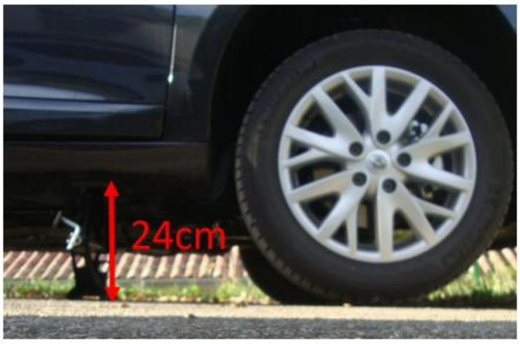
Il faut $H_{pont} > z_{max}$

<u>Exercice 13 : Oscillations en voiture – résolution de problème</u>

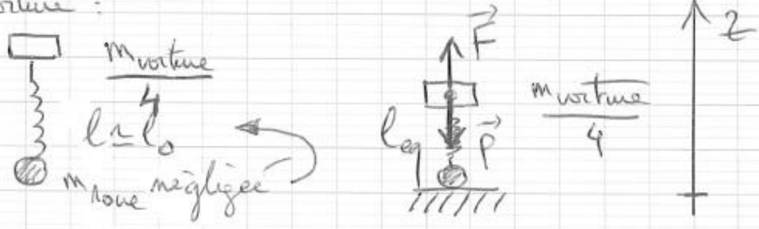
Pour des fréquences inférieures à $0{,}5\ Hz$, les organes internes du corps entrent en résonance (en particulier l'estomac) et le mal des transports apparaît.

Sera-t-on malade dans cette voiture ?

On donne deux photos d'une roue avec et sans cric :



On identifie un système masse-ressort, on le suppose non amorti.
Si on néglige le poids de la roue par rapport à celui de la voiture :



$$\Sigma = \frac{m_{voiture}}{4} = m$$

Equilibre : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

$$m\vec{g} - k(l_{eq} - l_0)\vec{u_z} = \vec{0}$$

$$-mg\vec{u_z} - k(l_{eq} - l_0)\vec{u_z} = \vec{0}$$

$$-mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$k(l_{eq} - l_0) = -mg$$

$$k = -\frac{mg}{l_{eq} - l_0} = \frac{mg}{l_0 - l_{eq}}.$$

On prend : $m_{voiture} = 1{,}2$ tonne

$$\Rightarrow m = \frac{1{,}2}{4} = 0{,}3 \text{ tonne} = 300 \text{ kg}.$$

$$k = \frac{300 \times 10}{(24 - 14).10^{-2}} = 3.10^4 \text{ N.m}^{-1}$$

D'où : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.10^4}{3.10^2}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq \underline{1{,}6 \text{ Hz}}$$

Pas malade !