# M4 OSCILLATEUR HARMONIQUE

## Travaux Dirigés (2)

**Exercice 1 : Etude du système masse-ressort horizontal amorti**

Considérons une masse $m$ supposée ponctuelle reliée à un ressort horizontal de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$, la masse pouvant se déplacer horizontalement sans frottements (par exemple à l'aide d'un système d'air pulsé venant compenser son poids). L'axe $(Ox)$ sera pris horizontal selon l'axe du ressort, avec pour origine O le point d'accroche du ressort.

On tient compte de la présence de frottements dont la puissance est : $P_{nc} = -hv^2$, avec $v$ vitesse du point matériel et $h$ coefficient positif indépendant de cette vitesse.

1) Appliquer le théorème de la puissance mécanique et en déduire l'équation différentielle liant $x$ et $t$.
2) La mettre sous forme canonique en ramenant à 1 le coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé. Il apparait alors deux coefficients constants devant les deux autres termes ; déterminer la dimension de chacun d'entre eux.

**Exercice 2 : Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti**

Un oscillateur harmonique amorti vérifie l'équation différentielle : $m\ddot{x} + \lambda\,\dot{x} + k\,x = kx_{éq}$

Il peut se mettre sous l'une de ses formes canoniques :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,x_{éq}$$

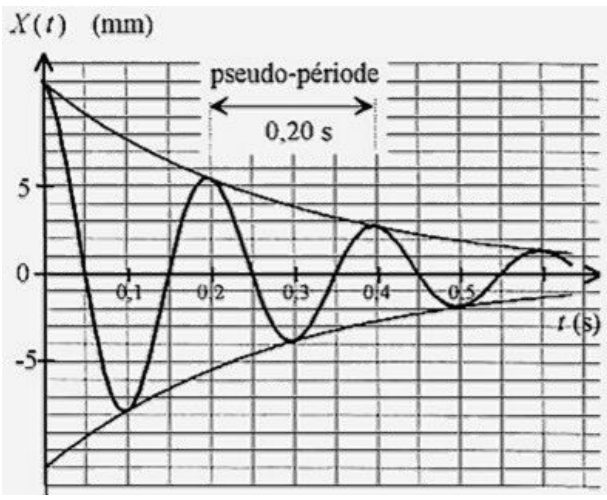
1) Quelles sont les dimensions de $\omega_0$, appelée pulsation propre, et $Q$, appelé facteur de qualité ? à quoi correspond la grandeur $x_{éq}$ ? Etablir leurs expressions.
2) Donner l'équation caractéristique associée, ainsi que les expressions du discriminant et du discriminant réduit associés à cette équation caractéristique.
3) Pour chacun des trois régimes possibles :
   a) Donner le nom de chaque régime ainsi que les différentes conditions associées.
   b) Donner la forme usuelle de la solution générale à l'équation homogène.

4) Etablir l'expression complète de $x(t)$ en supposant qu'à l'instant initial : vitesse initiale $v_0 = 0$, élongation initiale $X_0 = x_0 - x_{éq}$

**Exercice 3 : Analyse d'un tracé ; régime pseudo-périodique**

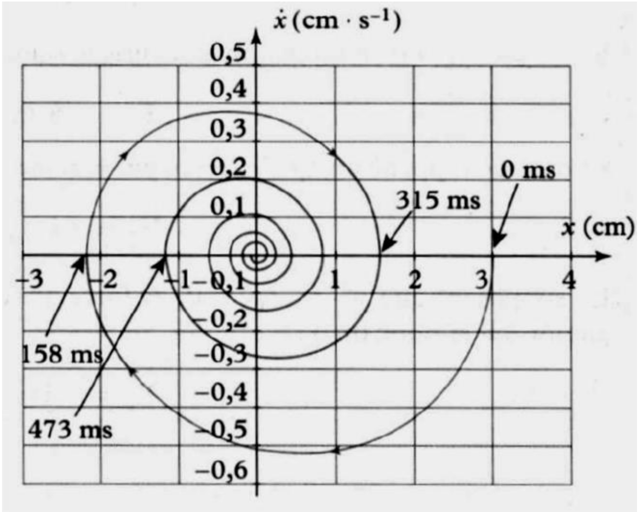
On réalise le relevé expérimental ci-contre.

Déterminer la période propre, la fréquence propre, le facteur de qualité et le temps de relaxation de cet oscillateur amorti.



## Exercice 4 : Exploitation d'un portrait de phase

On considère (ci-dessous) le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500\ g$, soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur $k$) et à une force de frottement fluide dont la puissance est $P_f = -\lambda v^2$, $v$ étant la vitesse de la masse $m$.



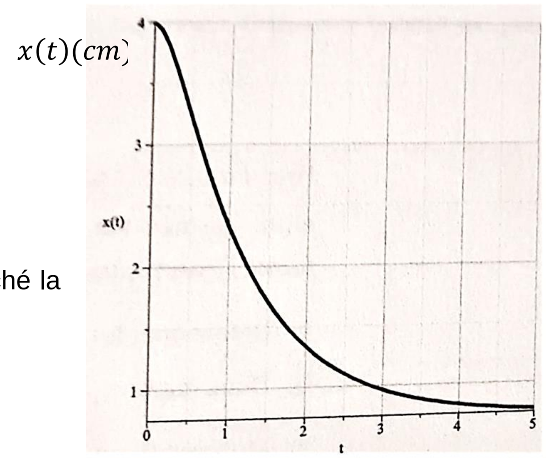

On note $x$ l'écart à la position d'équilibre ; l'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
2) Déterminer, par lecture graphique :
   - La valeur initiale de la position $x_0$.
   - La valeur finale de la position $x_\infty$.
   - La pseudo-période $T$.
   - Le décrément logarithmique $\delta$.
3) En déduire la pulsation propre $\omega_0$, le facteur de qualité $Q$ de l'oscillateur, la raideur $k$ du ressort et le coefficient de frottement fluide $\lambda$.

## Exercice 5 : Analyse d'un régime transitoire à partir d'un enregistrement temporel

On s'intéresse à un système masse-ressort horizontal immergé dans un fluide, formant un oscillateur harmonique amorti.

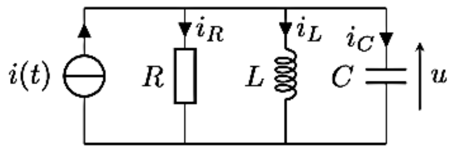
L'enregistrement de sa position repérée à partir de sa position d'équilibre est donnée ci-contre.




1) Déterminer les conditions initiales avec lesquelles on a lâché la masse.
2) Donner les caractéristiques du régime permanent atteint.
3) Définir le type de régime observé en justifiant la réponse.
4) Donner l'allure du portrait de phase correspondant.

## Exercice 6 : Circuit RLC parallèle soumis à un échelon de courant

On considère le circuit ci-contre. A l'instant *t* = 0, le générateur de courant impose un courant *i(t)* passant de 0 à $\eta$ = 10 mA. On a : *R* = 50 Ω, *C* = 400 nF, *L* = 10 mH.




1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par *u(t)* pour *t* > 0.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité *Q* en fonction de *R*, *L* et *C*.
3. Quel est le type de régime obtenu pour l'évolution de *u(t)* : apériodique, critique ou pseudopériodique ?
4. Justifier qu'à l'instant *t* = 0, $i_L(0)$ = 0 et *u(0)* = 0.

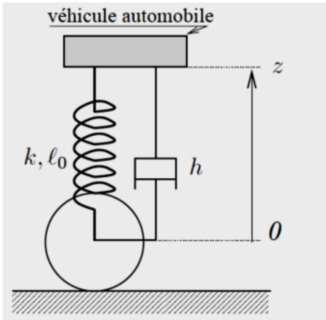
5. En déduire l'expression de *u(t)* pour *t* > 0.
6. Représenter l'allure de *u(t)* pour *t* > 0.

**<u>Exercice 7 : viscosimètre oscillant</u>**

Une bille de rayon *r* et de masse *m* est suspendue à un ressort de raideur *k* et de longueur au repos $l_0$. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité $\eta$, la bille est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Etablir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période *T* des oscillations, en fonction de *m, k,* $\eta$ et *r*.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est $T_0$. Déterminer le coefficient de viscosité $\eta$ du liquide, en fonction de *m, r, T* et $T_0$.

**<u>Exercice 8 : Suspension de voiture</u>**




On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement fluide $h$, correspondant à une puissance des forces de frottement $P_{fr} = -hv^2$.

Une masse $\frac{m}{4}$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement sur l'axe $(Oz)$ lié au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.

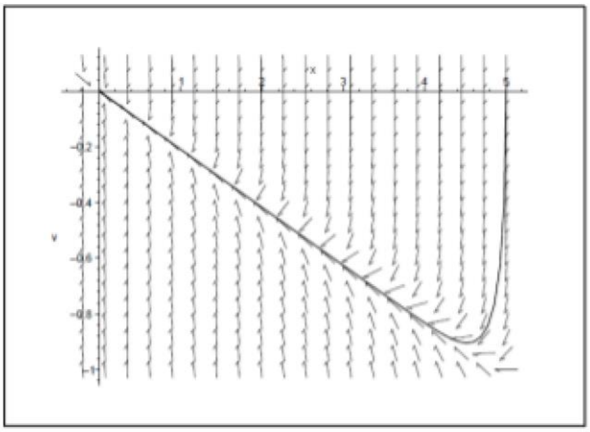
On donne $m = 1\,200$ kg.

1) Lors du changement d'une roue, on soulève la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur $d$ = 25 cm, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur du ressort vaut alors 40 cm, et on peut alors considérer qu'aucune force ne s'exerce plus sur le ressort (alors qu'à l'équilibre, le ressort est comprimé par le poids du véhicule). Montrer que la constante de raideur du ressort vaut $k = \frac{mg}{4d}$.
2) Déterminer et calculer $h$ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (la roue étant sur le sol à l'arrêt et la masse $\frac{m}{4}$ en mouvement vertical).
3) On enfonce la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur $d'$ = 5 cm et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude $z$ de la masse $\frac{m}{4}$.
4) On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut $m$ = 1 700 kg. Déterminer les paramètres $Q$ et $\omega_0$ de l'amortisseur.
5) Tracer l'allure de sa réponse lorsqu'on enfonce de $x_0$ = 5 cm la masse $\frac{m}{4}$ et qu'on lâche sans vitesse initiale. Conclure.

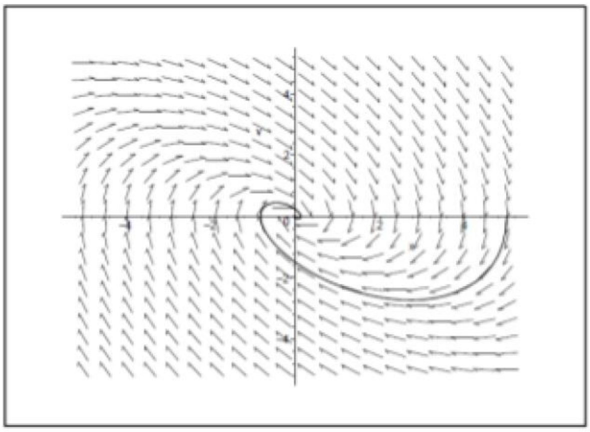
**<u>Exercice 9 : Portraits de phase</u>**

Attribuer à chaque portrait de phase le bon facteur de qualité parmi les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 50.

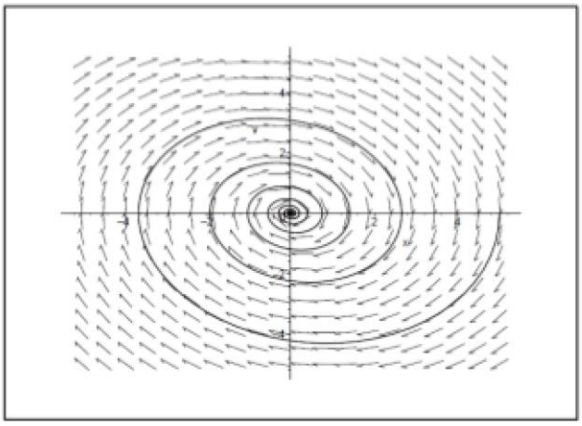
Graphique 1



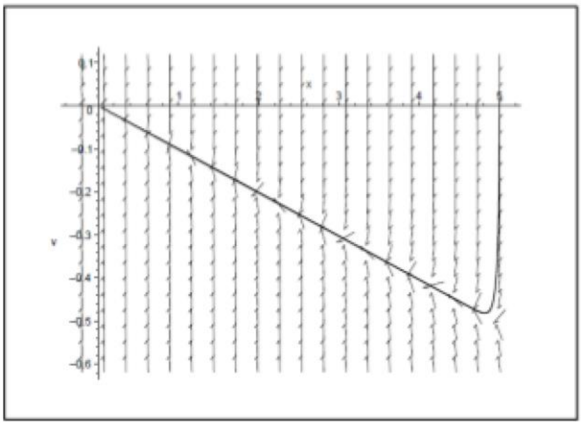
Graphique 2



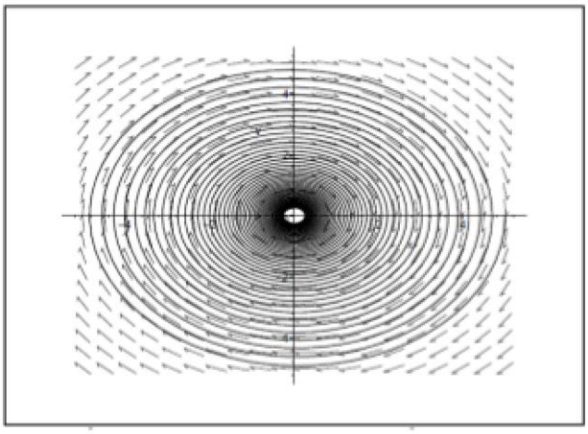
Graphique 3



Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6