CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 8 (18 au 23 novembre 2024)

Chapitres étudiés et questions de cours : Oscillateurs harmoniques non amortis et amortis (mécaniques et électriques).

Réponses attendues en bleu.

1ère question de cours : questions 1 à 7.

2ème question de cours : questions 8 à 13.

1) **Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique non amorti) : forme canonique + solution.**

   Forme canonique : $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = cte}$ avec $\boldsymbol{\omega_0}$ pulsation propre

Solution : $y(t) = SP + Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Y_m et φ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général *y(0)* et $\frac{dy}{dt}(0)$

ou

Solution : $\boldsymbol{y(t) = SP + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général *y(0)* et $\frac{dy}{dt}(0)$

2) **Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) : forme canonique, équation caractéristique et discriminant associé.**

Formes canoniques :

$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte}$ avec $\boldsymbol{Q}$ facteur de qualité, $\boldsymbol{\omega_0}$ pulsation propre

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$ avec $\xi = \frac{1}{2Q}$ facteur d'amortissement

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$ avec $\boxed{\boldsymbol{\lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}}}$

Equation caractéristique :

$\boldsymbol{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0}$ Discriminant : $\Delta = {\omega_0}^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$ => 2 racines r_1 et r_2

3) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime apériodique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+{\omega_0}^2y=cte$$ avec ***Q*** facteur de qualité, ***ω₀*** pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q < ½	ξ > 1	Δ > 0	2 racines réelles négatives $r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}+/_-\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}$	Apériodique	$y(t)=SP+Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(0)$.

4) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime pseudo-périodique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+{\omega_0}^2y=cte$$ avec ***Q*** facteur de qualité, ***ω₀*** pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q > ½	ξ < 1	Δ < 0	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}+/_-j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2}=-\lambda+/_-j\omega$ $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=\sqrt{{\omega_0}^2-\lambda^2}$ $\lambda=\frac{\omega_0}{2Q}$	Pseudo-périodique	$y(t)=SP+e^{-\lambda t}[Acos(\omega t)+Bsin(\omega t)]$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(0)$.

5) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime critique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+{\omega_0}^2y=cte$$ avec ***Q*** facteur de qualité, ***ω₀*** pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q = ½	$\xi = 1$	**$\Delta = 0$**	1 racine double $r = -\omega_0$	**Critique**	$y(t) = \boldsymbol{SP} + (\boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B})e^{-\omega_0 t}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(\mathbf{0})$.

6) **Donner la définition du décrément logarithmique.**

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

Décrément logarithmique : $\boldsymbol{\delta} = \ln\left[\frac{y(t)-y(\infty)}{y(t+T)-y(\infty)}\right] = ln\left[\frac{1}{e^{-\lambda T}}\right] = \boldsymbol{\lambda T} = \frac{\omega_0}{2Q}T$

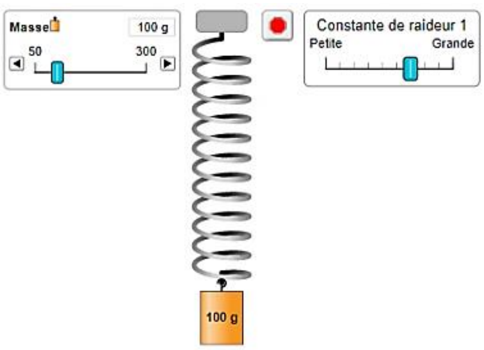
avec *y(t)* et *y(t+T)* valeurs de 2 « maxima » successifs

7) **Donner les analogies mécanique – électricité.**

Mécanique	**Electricité**
Position x (m)	Charge q (C)
Vitesse v ($m.s^{-1}$)	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k ($N.m^{-1}$)	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h ($N.m^{-1}.s$)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)

Démos de cours :

8) Système masse-ressort vertical : A partir du PFS, établir l'expression de la longueur à l'équilibre.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse m supposée ponctuelle

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe z orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ c'est-à-dire $mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

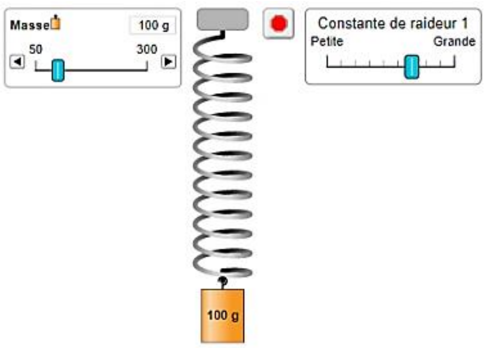
Détermination de la longueur du ressort à l'équilibre $\boldsymbol{l_{eq}}$:

En projetant sur l'axe z :

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z} = 0$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}}$

9) Système masse-ressort vertical : A partir du PFD, établir l'expression de l'équation différentielle du mouvement.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Masse m supposée ponctuelle

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (Axe z orienté vers le bas)

Force de rappel : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_s = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ c'est-à-dire $mg\vec{u}_z - k(l - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

En projetant sur l'axe z :

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{z}$

Equation différentielle vérifiée par la position $\boldsymbol{z = l - l_{eq}}$:

$mg - k\left(l - l_{eq} + l_{eq} - l_0\right) = m\ddot{z}$

Avec : $mg - k\left(l_{eq} - l_0\right) = 0$ (Equilibre)

On obtient : $-k\left(l - l_{eq}\right) = -kz = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$

D'où : $\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0}}$ Equation différentielle linéaire d'ordre à coefficients constants

$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2z}{dt^2} + {\omega_0}^2\, z = 0}}$ Forme canonique

10) Résoudre l'équation différentielle homogène (SEH) de la fonction $z(t)$ suivante :

$$\frac{d^2z}{dt^2}(t) + \omega_0{}^2 z(t) = 0$$

On donne les 2 conditions initiales :

$z(0) = z(t=0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t=0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

a) Solution de l'équation homogène (SEH) : $z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

b) Solution particulière (SP) : Ici : $z_P(t) = 0$

c) Solution générale (SG) : $z(t) = z_H(t) + z_P(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

d) Conditions initiales (CI) : 2 conditions initiales sont nécessaires

$z(0) = z(t=0) = Z_0$ (Elongation initiale non nulle)

$\dot{z}(0) = \dot{z}(t=0) = 0$ (Vitesse initiale nulle)

e) Détermination des constantes d'intégration :

$z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$\dot{z}(t) = -\omega_0 Z_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $-\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$

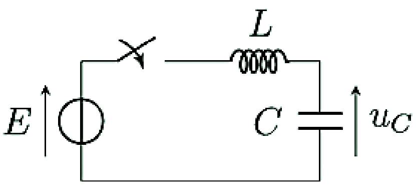
$z(0) = Z_m\cos(\varphi)$ ou A $mathématiquement$ et $z(0) = Z_0$ $physiquement$

$\dot{z}(0) = -\omega_0 Z_m \sin(\varphi)$ ou $\omega_0 B$ $mathématiquement$ et $\dot{z}(0) = 0$ $physiquement$

On en déduit : En prenant $\varphi = 0$, on obtient $Z_m = Z_0$

Ou : $A = Z_0$, $B = 0$

11) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à *t* = 0) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier la constante introduite.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_C = 0$

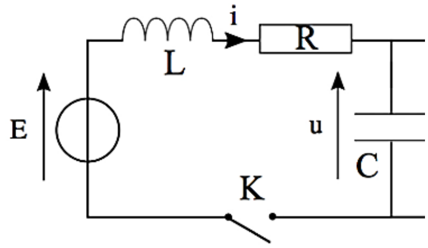
Appliquer la loi entre *u* et *i* pour chaque récepteur. $u_L = L\frac{di}{dt}$; $i = C\frac{du_C}{dt}$

On obtient : $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E$

Sous forme canonique :

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0{}^2 u_C = \omega_0{}^2 E$, avec , en identifiant : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre (rad.s^{-1})

12) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à t = 0) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier les constantes introduites.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_R - u = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_L = L\frac{di}{dt}$; $i = C\frac{du}{dt}$; $u_R = R.i$

On obtient sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}E$$

On identifie à la forme canonique suivante :

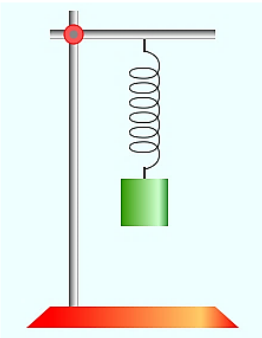
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E$$

On détermine par identification :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre (rad.s^{-1})

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur de qualité (sans dimension)

13) Pour le système masse-ressort amorti ci-contre, on écarte la masse de sa position d'équilibre ; déterminer l'équation du mouvement. La mettre sous forme canonique ; identifier les constantes introduites.



Graduer axe z vers le bas.

Prendre l'origine de l'axe au point de fixation du ressort.

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : Masse m.

Bilan des forces extérieures appliquées :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

Force de rappel élastique : $\vec{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_s}$ avec $\overrightarrow{u_s}$ vecteur sortant du ressort.

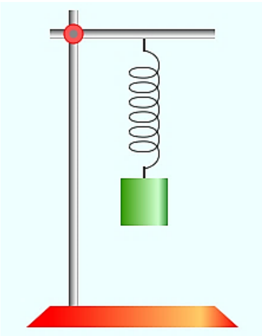
$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_z}$ et $l = z$

On obtient : $\vec{F} = -k(z - l_0)\overrightarrow{u_z}$

Force de frottement fluide : $f = -h\vec{v} = -h\dot{z}\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

En projetant sur z on obtient :



$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$

Sous forme canonique :

$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0$

On identifie à la forme canonique suivante :

$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + {\omega_0}^2 z = g + \frac{k}{m}l_0$

On détermine par identification :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre (rad.s^{-1})

$Q = \frac{1}{h}\sqrt{mk}$ facteur de qualité (sans dimension)

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

4. Oscillations libres	
Interprétation avec le graphe de l'énergie potentielle	Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
Oscillateur non amorti	Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique. Étude expérimentale d'un oscillateur harmonique.
Portrait de phase	Interpréter un portrait de phase fourni ou relevé expérimentalement.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 2	Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides. Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique. Identifier les différents régimes et exploiter les courbes. Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1. Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement.