M3 – SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

Travaux dirigés

Exercice 8 : Skieur

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée telle que sa puissance est égale à $P_1 = -\lambda v^2$, où λ est un coefficient constant positif et v la vitesse du skieur. La force de frottement exercée par la neige a une puissance $P_2 = -f\ m\ g\ v \cos\alpha$ avec f le coefficient de frottement solide. On choisit comme origine de l'axe *Ox* de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable.

1. Déterminer la dimension de λ.
2. Déterminer l'énergie potentielle du skieur en fonction de m, g, x et α.
3. Peut-on appliquer la conservation de l'énergie mécanique ?
4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement grâce à une étude énergétique. L'écrire sous la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_m}{\tau}$. Donnez les expressions de v_m et τ.
5. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de l'équation horaire $x(t)$.
6. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_{lim}. AN : calculer v_{lim} avec λ = 1,0 SI, f = 0,90, g = 10 m.s^{-2}, m = 80 kg et α = 45°.
7. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où le skieur a une vitesse égale à $v_{lim}/2$.
8. Déterminer la distance d_1 parcourue par le skieur à t_1.
9. A la date t_1, le skieur tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10. Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.
10. Déterminer la vitesse puis l'équation de la trajectoire en fonction de g, α, f , t , v_{lim} et d_1, en prenant comme nouvelle origine des temps la date t_1.
11. Calculer la distance d_2 parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

Système : skieur ; Réf : terrestre, BdF : poids, frottements

1. $[\lambda] = \frac{[P]}{[v]^2} = \frac{[E]}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = \frac{[m][v]^2}{T} \times \frac{1}{[v]^2} = M.T^{-1}$
2. $E_p = -mgy\ \ avec\ \ \sin\alpha = \frac{y}{x}\ \ d'où\ \ y = x\sin\alpha\ \ et\ E_p = -mgx\ \sin\alpha$
3. Frottements : E_m ne se conserve pas
4. $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ m\,\dot{x}^2 - mgx\sin\alpha$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} \times 2 \times m\,\dot{x}\,\ddot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha \quad et \quad P_{nc} = -f\ m\ g\ \dot{x}\cos\alpha - \lambda\dot{x}^2 \quad d'où$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha\ )$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = \frac{v_m}{\tau} \quad avec\ \ \tau = \frac{m}{\lambda}\ \ et\ v_m = \tau g(\sin\alpha - f\ \cos\alpha\ ) = \frac{mg}{\lambda}\ (\sin\alpha - f\ \cos\alpha\ )$$

5. $\boxed{v = v_m\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$

$$x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + cte\ \ avec\ x(0) = 0 = \tau\ v_m + cte \Rightarrow cte = -\tau\ v_m$$

$$\boxed{x = v_m\left(t + \tau\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau\right)}$$

6. $v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = v_m$

$$AN: v_{lim} = \frac{10 \times 80}{1}(\sin 45° - 0.9 \times \cos 45°) = 57\ m.s^{-1} = 206\ \mathrm{km.h^{-1}}$$

7. $v = \frac{v_{lim}}{2} = v_{lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{1}{2}$

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln 2 \Longrightarrow\ t_1 = -\tau\ \ln\frac{1}{2} = \tau\ \ln 2 = \frac{80}{1}\ln 2 = 55\ s$$

8. Distance parcourue $d_1 = x(t_1)$

$d_1 = x(t_1) = 874\ m$

9. $\ddot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)$

10. Nouvelle origine des temps : point de chute

$\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)t + cte$ avec $\dot{x}(0) = \frac{v_{lim}}{2} \Rightarrow cte = \frac{v_{lim}}{2}$

$$\boxed{\dot{x} = g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)t + \frac{v_{lim}}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + cte\ \ \ avec\ x(0) = d_1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\ g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)t^2 + \frac{v_{lim}}{2}\ t + d_1}$$

11. Distance d_2 obtenue pour $\dot{x} = 0$

$$g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)t_A + \frac{v_{lim}}{2} = 0 \Rightarrow t_A g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha) = -\frac{v_{lim}}{2}$$

$$t_A = -\frac{v_{lim}}{2g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)} \approx 0{,}5\ s$$

$$d_2 = x(t_A) = \frac{-{v_{lim}}^2}{8g(\sin\alpha - 10\ f\ \ \cos\alpha)} + d_1 = 7{,}1 + d_1 = 881\ m$$

Exercice 9 : Température d'une résistance électrique

Une résistance électrique de capacité thermique C est placée dans une pièce à la température T_0 supposée constante.

Initialement, la résistance est en équilibre thermique avec la pièce à la température à T_0. À $t = 0$, on fait passer un courant dans la résistance qui dissipe par effet Joule une puissance constante P dans la résistance.

Lorsque la température de la résistance est T, on admet qu'il y a un transfert thermique de la résistance vers le milieu extérieur de la forme $aC(T - T_0)dt$ pendant un temps infinitésimal dt, a étant une constante positive.

1) Régime permanent : à l'aide d'un bilan énergétique en régime permanent, donner la température limite T_∞ si t tend vers l'infini.

2) Écrire un bilan énergétique entre deux instants voisins t et $t + dt$ et déterminer l'équation différentielle liant T et t. Contrôler son homogénéité. Retrouver T_∞.

3) Intégrer cette équation pour déterminer $T(t)$.

Température d'une résistance électrique

1) $dH \underbrace{=}_{PCII} CdT \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ isobare}} \delta Q = Pdt - aC(T - T_0)dt$

En régime permanent, la température ne varie plus, soit $T = T_\infty \quad dT = 0$

$$dH \underbrace{=}_{\substack{régime \\ permanent}} 0 = Pdt - aC(T_\infty - T_0)dt$$

Soit $P = aC(T_\infty - T_0)$ et $T_\infty = T_0 + \frac{P}{aC}$;

2) $dH \underbrace{=}_{PCII} CdT \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ isobare}} \delta Q = Pdt - aC(T - T_0)dt = [P - aC(T - T_0)]dt$

Soit en divisant par dt : $C\frac{dT}{dt} = P - aC(T - T_0)$ ou encore sous forme canonique : $\frac{dT}{dt} + aT = \frac{P}{C} + aT_0$

Avec valeur en régime stationnaire : $T_\infty = T_0 + \frac{P}{aC}$ et constante de temps caractéristique $\tau = \frac{1}{a}$

3) $T(t) = T_0 + \frac{P}{aC}(1 - e^{-at})$