M4 OSCILLATEUR HARMONIQUE

Travaux Dirigés (2)

Exercice 1 : Etude du système masse-ressort horizontal amorti

Considérons une masse m supposée ponctuelle reliée à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, la masse pouvant se déplacer horizontalement sans frottements (par exemple à l'aide d'un système d'air pulsé venant compenser son poids). L'axe (Ox) sera pris horizontal selon l'axe du ressort, avec pour origine O le point d'accroche du ressort.

On tient compte de la présence de frottements dont la puissance est : $P_{nc} = -hv^2$, avec v vitesse du point matériel et h coefficient positif indépendant de cette vitesse.

1) Appliquer le théorème de la puissance mécanique et en déduire l'équation différentielle liant x et t.
2) La mettre sous forme canonique en ramenant à 1 le coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé. Il apparait alors deux coefficients constants devant les deux autres termes ; déterminer la dimension de chacun d'entre eux.

Système : point M de masse m étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
BAME

E_{pp}; force de rappel du ressort : E_{pe}, réaction normale du support, orthogonale au déplacement : $W(\vec{T}) = 0$.

Energie potentielle : $E_p = E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + mgz_0 + cte = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$

Energie cinétique : $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Energie mécanique : $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dEm}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - \ell_0) = -h\dot{x}^2$ soit $\dot{x}\,[m\ddot{x} + k(x - \ell_0) + h\dot{x}] = 0$

On s'intéresse au mouvement de la bille, donc $\dot{x} \neq 0$

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants liant x et t :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\ell_0 \quad ou \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = k\ell_0$$

A l'équilibre, $\dot{x}_{ex} = 0$ et $\ddot{x}_{éq} = 0$, soit $x_{éq} = \ell_0$

Mise sous forme canonique : On commence par ramener à 1 le coefficient du terme de plus haut degré :

$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}x_{éq}$

Dimensions des coefficients $\frac{h}{m}$ et $\frac{k}{m}$: $\left[\frac{h}{m}\right] = s^{-1}$ et $\left[\frac{k}{m}\right] = s^{-2}$.

<u>Exercice 2 : Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti</u>

Un oscillateur harmonique amorti vérifie l'équation différentielle : $m\ddot{x} + \lambda\,\dot{x} + k\,x = kx_{éq}$

Il peut se mettre sous l'une de ses formes canoniques :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,x_{éq}$$

1) Quelles sont les dimensions de ω_0, appelée pulsation propre, et Q, appelé facteur de qualité ? à quoi correspond la grandeur $x_{éq}$? Etablir leurs expressions.
2) Donner l'équation caractéristique associée, ainsi que les expressions du discriminant et du discriminant réduit associés à cette équation caractéristique.
3) Pour chacun des trois régimes possibles :
   a) Donner le nom de chaque régime ainsi que les différentes conditions associées.
   b) Donner la forme usuelle de la solution générale à l'équation homogène.

4) Etablir l'expression complète de $x(t)$ en supposant qu'à l'instant initial : vitesse initiale $v_0 = 0$, élongation initiale $X_0 = x_0 - x_{éq}$

Exercice 2

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = kx_{eq}$$

$\div m$ $\Leftrightarrow$ $\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq}$.

Forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

1) On identifie :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \omega_0 \frac{m}{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{m}{\lambda} = \underline{\frac{1}{\lambda}\sqrt{km}} \\ \frac{k}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \end{cases}$$

x_{eq} : Position à l'équilibre, en régime permanent.
Q : facteur de qualité.
ω_0 : pulsation propre.

$$\left[\ddot{x}\right] = \left[\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}\right] = \left[\omega_0^2 x\right] = m.s^{-2}$$

$\left[\omega_0^2 x\right] = m.s^{-2}$ avec $[x] = m$

d'où : $[\omega_0^2] = s^{-2}$

$[\omega_0] = s^{-1}$ (ou rad.s^{-1})

$\left[\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}\right] = m.s^{-2}$ avec $[\dot{x}] = m.s^{-1}$

$[\omega_0] = s^{-1}$

d'où : $[Q] = 1$.

2) Éq. caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

~~Discriminant réduit~~

3) Voir cours :

4) $\Delta > 0$ ou $Q < \frac{1}{2}$: Régime apériodique.

SEH : $x_H = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

SP : $x_p = x_{eq}$

SG : $x(t) = x_{eq} + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

CI : $x(0) = x_{eq} + X_0$

$\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{\text{maths}} = x_{eq} + A + B \underbrace{=}_{\text{Phys / CI}} x_{eq} + X_0 \\ \underbrace{\dot{x}(0)}_{\text{maths}} = r_1 A + r_2 B \underbrace{=}_{\text{Phys / CI}} 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \cancel{x_{eq}} + A + B = \cancel{x_{eq}} + X_0 \quad (1) \\ r_1 A + r_2 B = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Résolution : (1) $\Rightarrow$ $B = X_0 - A$.

(2) $r_1 A + r_2 (X_0 - A) = 0$

$r_1 A + r_2 X_0 - r_2 A = 0$

$A(r_1 - r_2) = -r_2 X_0$

$A = -\frac{r_2}{r_1 - r_2} X_0$

$A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} X_0$

Avec :

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/- \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$

D'où : $B = X_0 - A = X_0 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} X_0 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} X_0$

$\Delta < 0$ ou $Q > \frac{1}{2}$: Régime pseudo-périodique

SEH : $x_H = e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$.
SP : $x_p = x_{eq}$
SG : $\underline{x(t) = x_{eq} + e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$
CI : $x(0) = x_{eq} + X_0$
$\dot{x}(0) = 0$
$\dot{x}(t) = e^{-\lambda t}(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)$.
$-\lambda e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$.

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{maths} = x_{eq} + A \underbrace{=}_{Phys/CI} x_{eq} + X_0 \\ \underbrace{\dot{x}(0)}_{maths} = \omega B - \lambda A \underbrace{=}_{Phys/CI} 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \cancel{x_{eq}} + A = \cancel{x_{eq}} + X_0 \Rightarrow \underline{A = X_0} \\ \omega B - \lambda A = 0 \Rightarrow \underline{B = \frac{\lambda}{\omega} A} \end{cases}$$

$\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$: Régime critique

SEH : $x_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$
SP : $x_p = x_{eq}$
SG : $\underline{x(t) = x_{eq} + (At + B)e^{-\omega_0 t}}$

CI : $\left| \begin{array}{l} x(0) = x_{eq} + X_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right.$
$\dot{x}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0(At + B)e^{-\omega_0 t}$

D'où :

$$\begin{cases} \underbrace{x(0)}_{maths} = x_{eq} + B \underbrace{=}_{CI} x_{eq} + X_0 \\ \dot{x}(0) = A - \omega_0 B = 0. \end{cases}$$

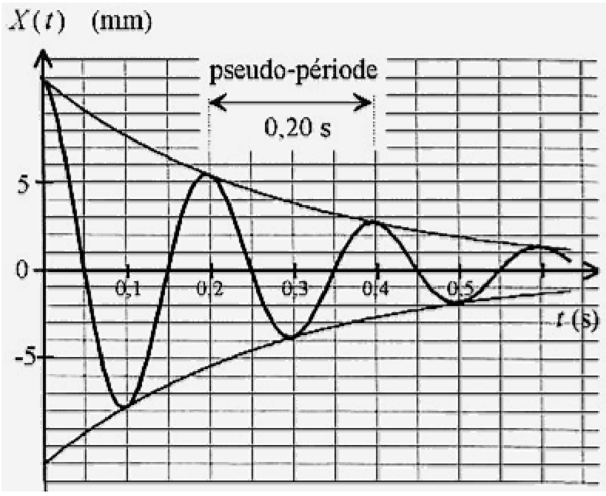
On obtient :

$\underline{B = X_0}$
$\underline{A = \omega_0 B = \omega_0 X_0}$

Exercice 3 : Analyse d’un tracé ; régime pseudo-périodique

On réalise le relevé expérimental ci-contre.

Déterminer la période propre, la fréquence propre, le facteur de qualité et le temps de relaxation de cet oscillateur amorti.



Exercice 3 : Analyse d'un tracé ; régime pseudo-périodique

* $X(\infty) = 0$

graph : $X(0) = 11\,mm$; $X(T) = 5{,}5\,mm$; $X(2T) = 2{,}8\,mm$; $X(3T) = 1{,}3\,mm$

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{X(0) - X_\infty}{X(T) - X_\infty}\right) = 0{,}69$$

$$\delta_2 = \ln\left(\frac{X(T) - X_\infty}{X(2T) - X_\infty}\right) = 0{,}68$$

$$\delta_3 = \ln\left(\frac{X(2T) - X_\infty}{X(3T) - X_\infty}\right) = 0{,}77$$

Concl :

$$\delta \simeq 0{,}7 = \text{cte}$$

* Lecture graphique pseudo-période :

$$T = 0{,}2\,s$$

* On exploite le décrément logarithmique :

$$\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

On détermine l'amortissement λ :

$$\lambda = \frac{\delta}{T} = \frac{0{,}7}{0{,}2} = 3{,}5\,s^{-1}$$

* On en déduit le temps de relaxation τ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3{,}5} = 0{,}29\,s$$

* Pseudo-pulsation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi = 31{,}4\,rad.s^{-1}$$

* Pseudo-fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5\,Hz$$

* Pulsation propre :

On sait que :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

D'où :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2} = \sqrt{31{,}4^2 + 3{,}5^2} = 31{,}6\,rad$$

Remarque : $\omega_0 \simeq \omega$ car $\lambda \ll \omega$

* Fréquence propre :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5{,}03\,Hz \simeq f = 5\,Hz$$

* Période propre :

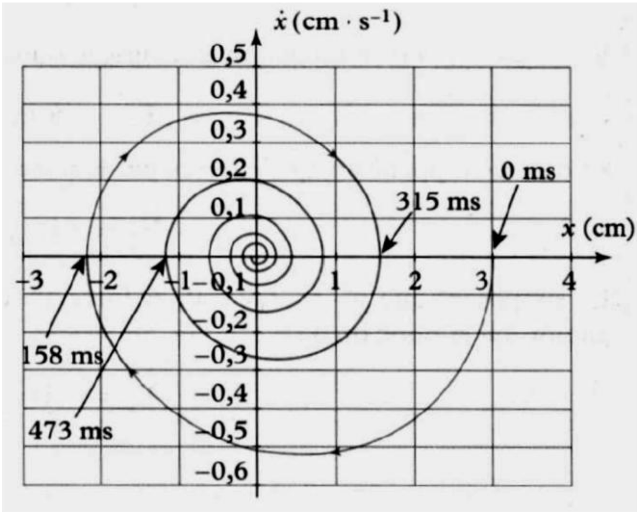
$$T_0 = \frac{1}{f_0} \simeq \frac{1}{f} \simeq T = 0{,}2\,s$$

* Facteur de qualité :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{31,6}{2 \times 3,5} = 4,5$$

Exercice 4 : Exploitation d'un portrait de phase



On considère (ci-dessous) le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500\ g$, soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide dont la puissance est $P_f = -\lambda v^2$, v étant la vitesse de la masse m.

On note x l'écart à la position d'équilibre ; l'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
2) Déterminer, par lecture graphique :
   - La valeur initiale de la position x_0.
   - La valeur finale de la position x_∞.
   - La pseudo-période T.
   - Le décrément logarithmique δ.

Exercice 4

1) Régime pseudo-périodique.

2) $x_0 = 3$ cm
$x_\infty = 0$
$T = 315$ ms

Pour calculer δ, on détermine les "maxima" successifs :
$x_0 = 3$ cm
$x_1 = 1{,}5$ cm
$x_2 = 0{,}8$ cm.

$$\delta = \ln\left(\frac{x_0 - x_\infty}{x_1 - x_\infty}\right) = \ln\left(\frac{3}{1{,}5}\right) = \ln 2 \simeq 0{,}7$$

ou

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1 - x_\infty}{x_2 - x_\infty}\right) = \ln\left(\frac{1{,}5}{0{,}8}\right) \simeq \ln 2 \simeq 0{,}7$$

3) $\lambda T = \delta$ Valeurs cohérentes entre elles.

d'où : $\lambda = \frac{\delta}{T} = \frac{0{,}7}{0{,}315} \simeq \underline{2 \text{ s}^{-1}}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3{,}14}{0{,}315} \simeq 20$ rad.s-1

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ d'où : $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$

$\omega_0 \simeq \omega \simeq \underline{20 \text{ rad.s}^{-1}}$

$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ d'où : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{20}{2 \times 2} = \underline{5}$

$P = -\lambda_2 v^2$

$\vec{f} = -\lambda_2 \vec{v}$

Système masse-ressort amorti :

$Q = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{mk} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{Q}\sqrt{mk} = \underline{2 \text{ kg.s}^{-1}}$

$\lambda_2 \neq \lambda$

kg.s-1 s-1

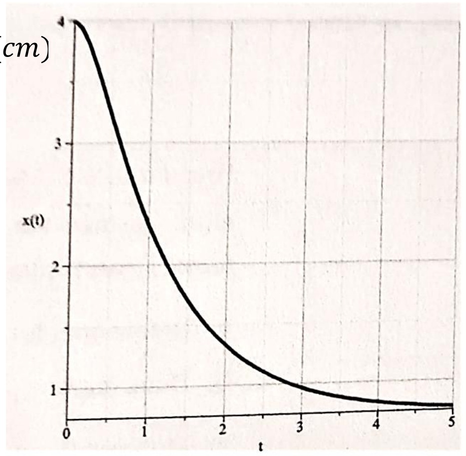
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m.\omega_0^2 = 0{,}5 \times 20^2$
$= \underline{200 \text{ N.m}^{-1}}$

Exercice 5 : Analyse d'un régime transitoire à partir d'un enregistrement temporel

On s'intéresse à un système masse-ressort horizontal immergé dans un fluide, formant un oscillateur harmonique amorti.

L'enregistrement de sa position repérée à partir de sa position d'équilibre est donnée ci-contre.

$x(t)(cm)$



1) Déterminer les conditions initiales avec lesquelles on a lâché la masse.
2) Donner les caractéristiques du régime permanent atteint.
3) Définir le type de régime observé en justifiant la réponse.
4) Donner l'allure du portrait de phase correspondant.

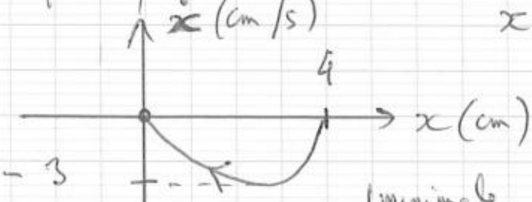
Exercice 5 : Analyse d'un régime transitoire à partir d'un enregistrement temporel

1) $x(0) = 4$ cm.
$\dot{x}(0) = 0$ (Tangente à l'origine nulle).

2) Régime permanent : $x(\infty) = 0{,}7$ cm
$\dot{x}(\infty) = 0$.

3) Régime apériodique.

4) $x_{max} = 4$ cm

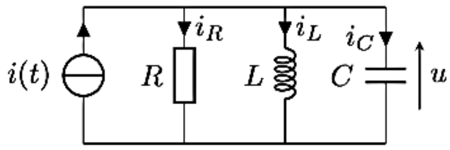


On lit sur $x(t)$ la pente minimale (ou maximale), c'est à dire $\dot{x}_{min} \simeq -3$ cm/s

Exercice 6 : Circuit RLC parallèle soumis à un échelon de courant

On considère le circuit ci-contre. A l'instant t = 0, le générateur de courant impose un courant *i(t)* passant de 0 à η = 10 mA. On a : R = 50 Ω, C = 400 nF, L = 10 mH.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
3. Quel est le type de régime obtenu pour l'évolution de $u(t)$: apériodique, critique ou pseudopériodique ?
4. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, $i_L(0) = 0$ et $u(0) = 0$.
5. En déduire l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.
6. Représenter l'allure de $u(t)$ pour $t > 0$.



1.2. $i = i_R + i_C + i_L$

avec $\begin{cases} u = R i_R \\ u = L \dfrac{di_L}{dt} \\ i_C = C \dfrac{du}{dt} \end{cases}$

d'où :

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} + i_L$$

En dérivant par rapport au temps :

$$0 = \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}$$

En multipliant par L :

$$0 = \frac{L}{R}\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{L\frac{di_L}{dt}}_{u}$$

En mettant sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}u = 0$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow Q = \omega_0 RC \qquad \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

3. On calcule Q

$$Q = 50 \times \sqrt{\frac{400.10^{-9}}{10.10^{-3}}} = 0{,}32$$

$Q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Régime apériodique

4. Continuité de la tension aux bornes du condensateur

$\Rightarrow u(0^+) = u(0^-) = 0$ → 1ère condition

$\Rightarrow i_R(0^+) = 0$ également. initiale

Continuité du courant dans la bobine

$\Rightarrow i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

Conclusion :

Pour $t = 0^+$, $i_R = i_L = 0$

d'où : $I = i_C(0^+) = C\dfrac{du}{dt}(0^+)$

d'où : $\dfrac{du}{dt}(0^+) = \dfrac{I}{C}$ → 2ème condition initiale

5. Régime apériodique (libre).

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec $\begin{cases} r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} + \dfrac{\omega_0}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} - 4} \\ r_2 = -\dfrac{\omega_0}{Q} - \dfrac{\omega_0}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} - 4} \end{cases}$

$$\frac{du}{dt} = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$$

$$\frac{du}{dt}(0^+) = Ar_1 + Br_2$$

d'où : $\begin{cases} u(0^+) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ \dfrac{du}{dt}(0^+) = Ar_1 + Br_2 = \dfrac{I}{C} \end{cases}$

$$Ar_1 - Ar_2 = \frac{I}{C}$$

$$A = \frac{I}{C(r_1 - r_2)} \qquad B = \frac{I}{C(r_2 - r_1)}$$

d'où la solution :

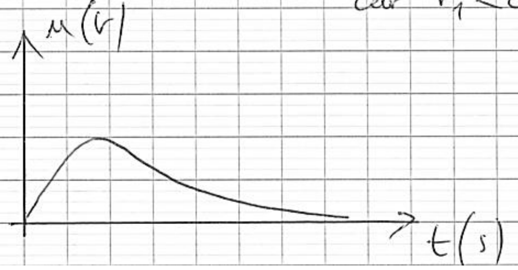
$$u(t) = \frac{I}{C(r_1 - r_2)}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)$$

6. On sait que

$$u(0^+) = 0$$

$$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{I}{C} \neq 0$$

Lorsque $t \to +\infty$, $u(t) \to 0$ car $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$



<u>Exercice 7 : viscosimètre oscillant</u>

Une bille de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la bille est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Etablir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T des oscillations, en fonction de m, k, η et r.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide, en fonction de m, r, T et T_0.

Exercice 2 : viscosimètre oscillant

1.

Référentiel : Terrestre / Labo
Système : Bille ⇔ Point matériel de masse m

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e_z}$$

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{sortant} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e_z}$$

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\,\vec{v} = -6\pi\eta r v\ldots$$

PFD : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z} = mg\,\vec{e_z} - k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

Avec $\ell - \ell_0 = \ell - \ell_{eq} + \ell_{eq} - \ell_0$.
et en projetant sur l'axe z

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \underbrace{mg - k(\ell_{eq} - \ell_0)}_{=0\ (\text{statique})} - k(\ell - \ell_{eq}) - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}$$

Avec $\ell - \ell_{eq} = z$
On obtient :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + 6\pi\eta r\frac{dz}{dt} + kz = 0$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{dz}{dt} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} z = 0$$

Par identification :

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{6\pi\eta r}{m} & (1) \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{6\pi\eta r}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$$ car oscillations

⇒ Régime pseudo-périodique

$$r_{1,2} = \underbrace{-\frac{6\pi\eta r}{2m}}_{\lambda} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}}_{\omega}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}$$

d'où :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}}$$

$$T = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - (3\pi\eta r)^2}}$$

2. Dans l'air : même bilan des forces mais avec $\vec{f}' = \vec{0}$ (frottements négligés).

d'où : équation du mouvement :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} z = 0$$

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On sait que : $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^2$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 \text{ d'après (1)}$$

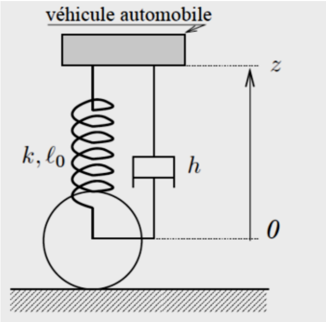
d'où :

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{9\pi^2\eta^2 r^2}{m^2}$$

d'où :

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

Exercice 8 : Suspension de voiture



On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement fluide h, correspondant à une puissance des forces de frottement $P_{fr} = -hv^2$.

Une masse $\frac{m}{4}$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement sur l'axe (Oz) lié au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.

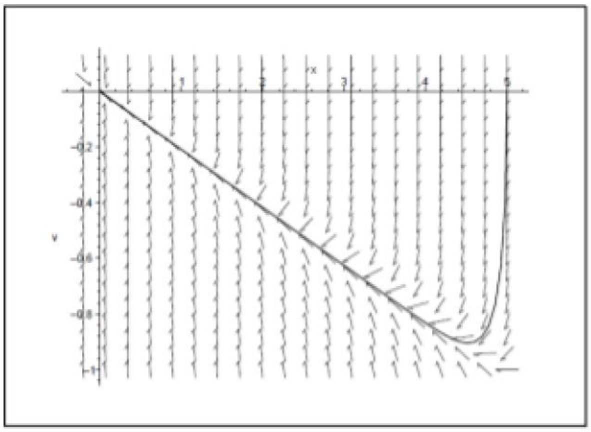
On donne $m = 1\,200$ kg.

1) Lors du changement d'une roue, on soulève la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur d = 25 cm, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur du ressort vaut alors 40 cm, et on peut alors considérer qu'aucune force ne s'exerce plus sur le ressort (alors qu'à l'équilibre, le ressort est comprimé par le poids du véhicule). Montrer que la constante de raideur du ressort vaut $k = \frac{mg}{4d}$.
2) Déterminer et calculer h afin que le dispositif fonctionne en régime critique (la roue étant sur le sol à l'arrêt et la masse $\frac{m}{4}$ en mouvement vertical).
3) On enfonce la masse $\frac{m}{4}$ d'une hauteur d' = 5 cm et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude z de la masse $\frac{m}{4}$.
4) On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut m = 1 700 kg. Déterminer les paramètres Q et ω_0 de l'amortisseur.
5) Tracer l'allure de sa réponse lorsqu'on enfonce de x_0 = 5 cm la masse $\frac{m}{4}$ et qu'on lâche sans vitesse initiale. Conclure.

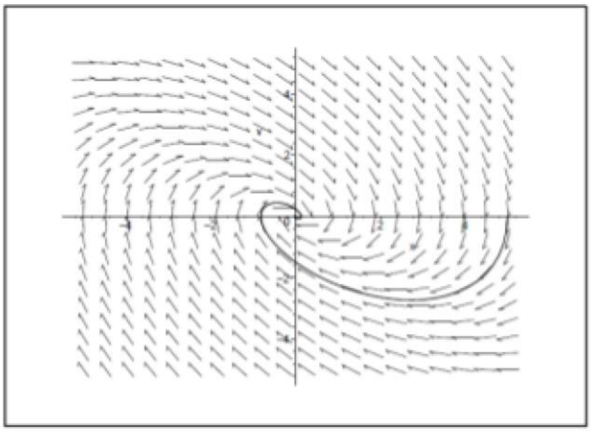
Exercice 9 : Portraits de phase

Attribuer à chaque portrait de phase le bon facteur de qualité parmi les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 50.

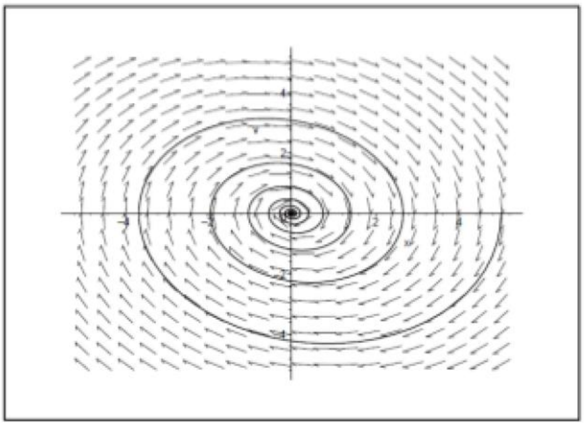
Graphique 1



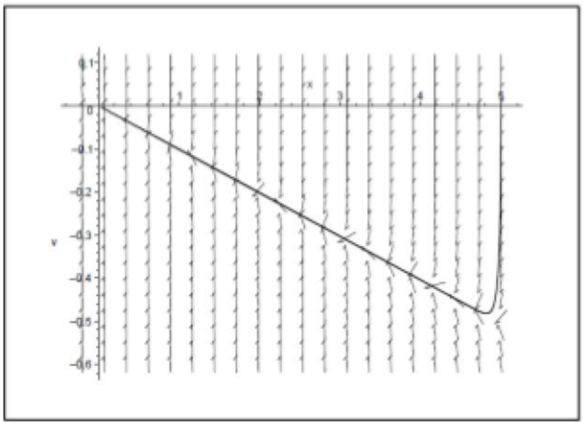
Graphique 2



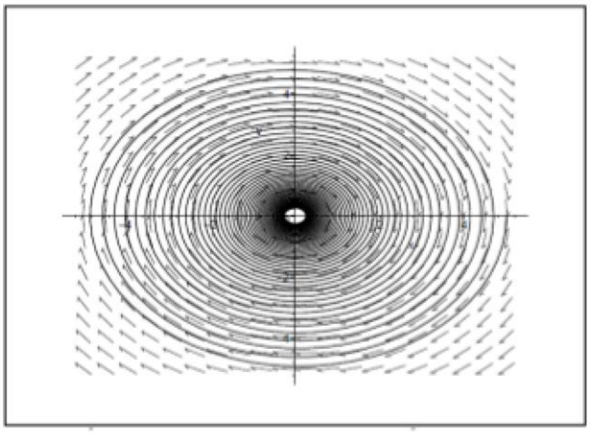
Graphique 3



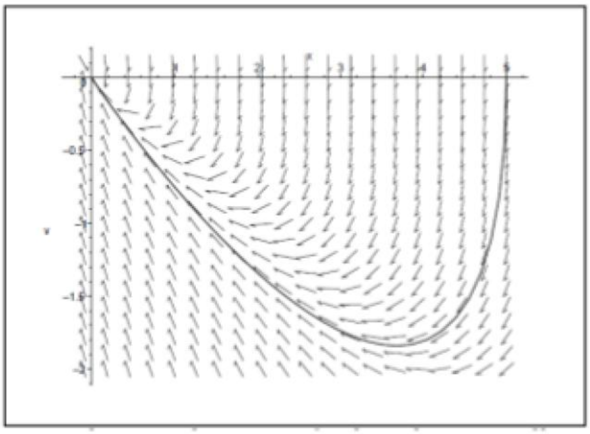
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



Les portraits de phase 2, 3 et 5 présentent des oscillations : moins d'une oscillation complète pour le 2, 5 ou 6 oscillations nettes pour le 3, un nombre très élevé (nettement supérieur à 20) pour le 5, or les oscillations se manifestent pour des facteurs de qualité supérieurs à 0,5, et le nombre d'oscillations visibles donne un ordre de grandeur du facteur de qualité.

On a donc :

Portrait de phase	N°2	N°3	N°5
Facteur de qualité	$Q = 1$	$Q = 5$	$Q = 50$

Par ailleurs, si on considère les portraits de phase 1, 4 et 6 sans oscillations, on constate au niveau des allures que le portrait de phase 1 est intermédiaire entre le 4 et le 6 ; il s'agit donc de celui correspondant au facteur de qualité intermédiaire restant, soit $Q = 0{,}2$.

Si l'on compare les portraits de phase extrêmes 4 et 6, on constate que pour le 4, la vitesse chute beaucoup plus rapidement (pour des positions ayant encore très peu varié), ce qui correspond à un amortissement plus important donc un facteur de qualité plus faible ; de plus, la vitesse maximale sur le portrait de phase 6 est beaucoup plus élevée que celle du portrait de phase 4 : c'est bien pour la figure 6 que la pente initiale de la courbe $x(t)$ est la plus élevée, ce qui correspond au retour le plus rapide vers la valeur asymptotique, soit au cas critique ($Q = 0{,}5$).

On a donc :

Portrait de phase	N°1	N°4	N°6
Facteur de qualité	$Q = 0{,}2$	$Q = 0{,}1$	$Q = 0{,}5$