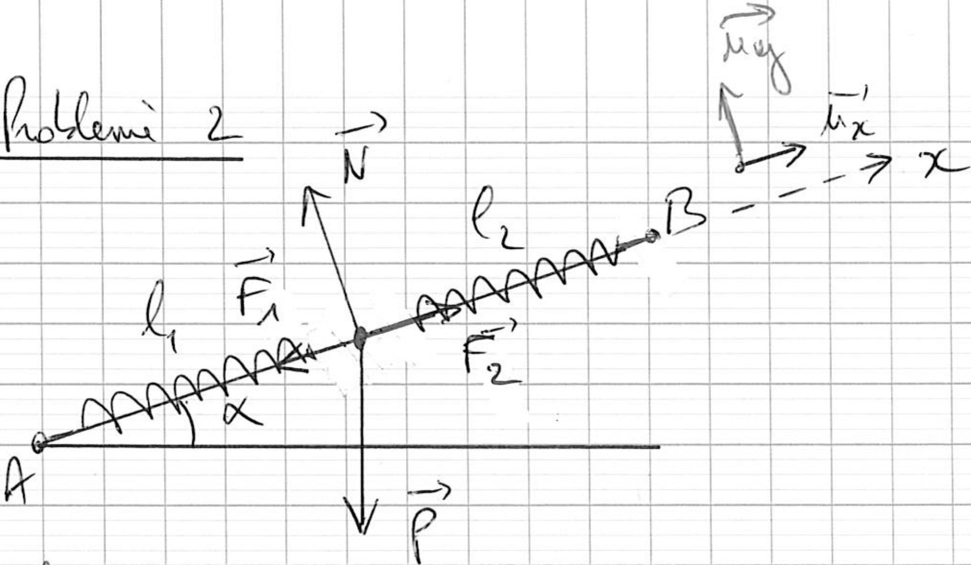
Problème 2

1)



2) Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Système : Anneau
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} \\ \vec{N} \text{ réaction de la tige, perpendiculaire à } x \\ \vec{F_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u_x} \\ \vec{F_2} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u_x} \end{cases}$$

PFD :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{en statique}$$

En projetant sur x :

$$-mg\sin\alpha - k(\ell_1 - \ell_0) + k(\ell_2 - \ell_0) = 0 \quad (1)$$

Or : $\ell_1 + \ell_2 = 2\ell_0$

$$\Rightarrow \ell_2 = 2\ell_0 - \ell_1$$

$$(1) \Rightarrow -mg\sin\alpha - k\ell_1 + \cancel{k\ell_0} + 2k\ell_0 - k\ell_1 - \cancel{k\ell_0} = 0$$

$$-2k\ell_1 + 2k\ell_0 = mg\sin\alpha$$

$$2k\ell_0 - mg\sin\alpha = 2k\ell_1$$

$$\boxed{\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{2k} = \ell_{1eq}} \qquad \boxed{\ell_{2eq} = \ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{2k}}$$

(*)

3) $\vec{F_1} = -k(l_1 - l_0)\vec{u_x}$

$\vec{F_2} = -k(l_2 - l_0)\vec{u_x}$

En faisant intervenir $l_{éq}$ dans les expressions :

$$\vec{F_1} = -k(l_1 - l_{1éq} + l_{1éq} - l_0)\vec{u_x}$$

$$\vec{F_2} = +k(l_2 - l_{2éq} + l_{2éq} - l_0)\vec{u_x}$$

PFD puis projection sur Ox

$$-mg\sin\alpha - k(l_1 - l_{1éq} + l_{1éq} - l_0) + k(l_2 - l_{2éq} + l_{2éq} - l_0) = m\ddot{X}$$

$$\underbrace{\left[-mg\sin\alpha - k(l_{1éq} - l_0) + k(l_{2éq} - l_0)\right]}_{=0} - k(\underbrace{l_1 - l_{1éq}}_{X}) + k(\underbrace{l_2 - l_{2éq}}_{-X}) = m\ddot{x}$$

$$-2kX = m\ddot{X}$$

(*) $$\boxed{\ddot{X} + \frac{2k}{m}X = 0} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

4) SEH = SG :

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$X(0) = X_0 \Rightarrow A = X_0$$

$$\dot{X}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{X}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

D'où :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$$

Avec $\underline{X_0 = 8 \text{ cm}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

On lit : $\underline{T_0 = 4 s}$

d'où :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \underline{1,57 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Or : $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$

d'où : $k = \frac{m\omega_0^2}{2} = \frac{20.10^{-3} \times 1,57^2}{2}$

$$\underline{k = 25.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}}$$

5) $x(0,5) = 8 \times \cos(1,57 \times 0,5)$

$= 8 \times \cos\left(\frac{2\pi}{4} \times 0,5\right)$

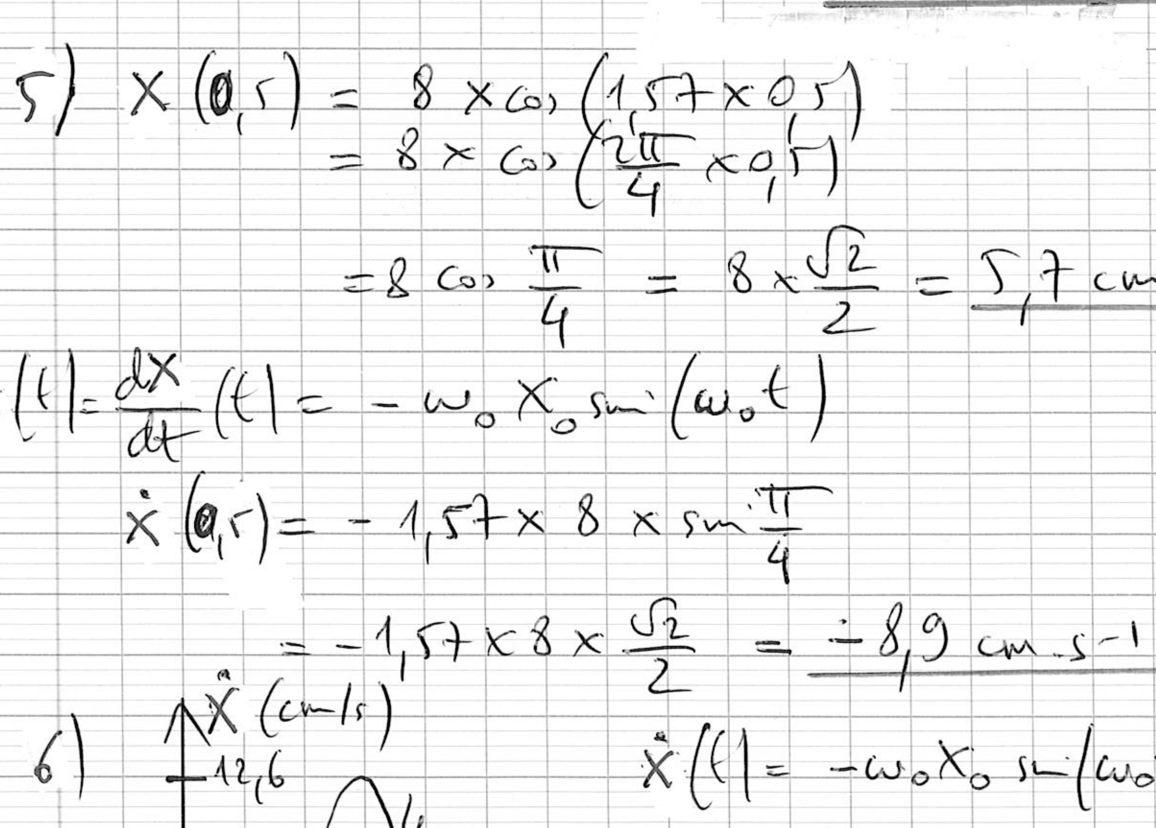
$= 8 \cos \frac{\pi}{4} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{5,7 \text{ cm}}$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(0,5) = -1,57 \times 8 \times \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -1,57 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-8,9 \text{ cm.s}^{-1}}$$

6)



$$\dot{x}(t) = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}_{max} = \omega_0 X_0$$

$$= \underline{12,6 \text{ cm.s}^{-1}}$$

8)
$$X = -6 \text{ cm}$$
$$8 \cos(1{,}57\, t) = -6$$
$$\cos(1{,}57\, t) = -\frac{3}{4}$$
$$1{,}57\, t = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = 2{,}42$$
$$t = \frac{2{,}42}{1{,}57} = \underline{1{,}5 \text{ s}}$$
vérifié

$$\dot{X}(1{,}5) = -1{,}57 \times 8 \times \sin(1{,}57 \times 2{,}42)$$
$$= \underline{-7{,}7 \text{ cm.s}^{-1}}$$
vérifié

2) Avec l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{pe_1} + E_{pe_2} + E_{pp}$$

$$= \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2 + mgz + cte$$

(Axe z orienté vers le haut)

On pose : $\ell_1 = \ell_0 + x$

$\ell_2 = \ell_0 - x$

On a : $z = \sin\alpha . x$

D'où :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\cancel{\ell_0} + x - \cancel{\ell_0})^2 + \frac{1}{2}k(\cancel{\ell_0} - x - \cancel{\ell_0})^2 + mg\sin\alpha\, x + cte$$

Position d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

$$\frac{dE_p}{dx} = kx + kx + mg\sin\alpha = 2kx + mg\sin\alpha.$$

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \iff 2kx + mg\sin\alpha = 0$$

$$\underline{x = x_{eq} = -\frac{mg\sin\alpha}{2k}}$$ ⚠ $x_{eq} < 0$

D'où :

$$\ell_{1eq} = \ell_0 + x_{eq} = \underline{\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{2k}} < \ell_0 \text{ - OK}$$

$$\ell_{2eq} = \ell_0 - x_{eq} = \underline{\ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{2k}} > \ell_0 \text{ - OK}$$

3) Avec le théorème de l'énergie mécanique / de la puissance mécanique :

$\left(X = x - x_{eq}\right)$
$\downarrow$
Changement d'origine.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$$

$$E_{pp} = mg \sin\alpha \, x + cte$$
$$= mg \sin\alpha \left(X + x_{eq}\right) + cte$$

$$E_{pe_1} = \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2$$
$$= \frac{1}{2} k (l_1 - l_{1eq} + l_{1eq} - l_0)^2$$
$$= \frac{1}{2} k (x - x_{eq} + x_{eq})^2 = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (X + x_{eq})^2$$

$$E_{p_2} = \frac{1}{2} k (l_2 - l_0)^2$$
$$= \frac{1}{2} k (l_2 - l_{2eq} + l_{2eq} - l_0)^2$$
$$= \frac{1}{2} k (-x + \cancel{x_{eq}} - \cancel{x_{eq}})^2 = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (X + x_{eq})^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{X}^2 + mg \sin\alpha (X + x_{eq}) + cte + k (X + x_{eq})^2\right)$$

$$= P_{nc} = 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m \dot{X} \ddot{X} + mg \sin\alpha \, \dot{X} + 2k \dot{X} (X + x_{eq}) = 0$$

$$\dot{X} \left(m \ddot{X} + mg \sin\alpha + 2k (X + x_{eq})\right) = 0$$

$\dot{X} = 0$ non retenu

ou

$$m\ddot{X} + mg\sin\alpha + 2k(X + x_{eq}) = 0$$

En divisant par $m \neq 0$:

$$\ddot{X} + g\sin\alpha + \frac{2k}{m}(X + x_{eq}) = 0$$

$$\ddot{X} + 2kX = \underbrace{-g\sin\alpha - \frac{2k}{m}x_{eq}}_{= 0 \text{ (equilibre statique)}}.$$

$$\ddot{X} + \frac{2k}{m}X = 0$$