CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 9 (25 au 30 novembre 2024)

Chapitres étudiés et questions de cours :

- **Oscillateurs harmoniques amortis (mécaniques et électriques)**
- **Changements d'état en thermodynamique (début)**

Réponses attendues en bleu.

1ère question de cours : questions 1 à 7.

2ème question de cours : questions 8 à 13.

1) **Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) : forme canonique, équation caractéristique et discriminant associé.**

Formes canoniques :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$ avec Q facteur de qualité, ω_0 pulsation propre

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$ avec $\xi = \frac{1}{2Q}$ facteur d'amortissement

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$ avec $\boxed{\lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}}$

Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$ Discriminant : $\Delta = {\omega_0}^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$ => 2 racines r_1 et r_2

2) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime apériodique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$$ avec Q facteur de qualité, ω_0 pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q < ½	$\xi > 1$	$\Delta > 0$	2 racines réelles négatives $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$	Apériodique	$y(t) = SP + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général $y(0)$ et $\frac{dy}{dt}(0)$.

3) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime pseudo-périodique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + \omega_0{}^2 y = cte$$ avec ***Q*** facteur de qualité, ω_0 pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q > ½	ξ < 1	**Δ < 0**	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2} = -\lambda +/_- j\omega$ $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \lambda^2}$ $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$	**Pseudo-périodique**	$y(t) = SP + e^{-\lambda t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(0)$.

4) **La forme canonique de l'équation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti) étant donnée ci-dessous, donner les conditions du régime critique, et la solution associée.**

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + \omega_0{}^2 y = cte$$ avec ***Q*** facteur de qualité, ω_0 pulsation propre

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q = ½	ξ = 1	**Δ = 0**	1 racine double $r = -\omega_0$	**Critique**	$y(t) = SP + (At + B)e^{-\omega_0 t}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(0)$.

5) **Donner la définition du décrément logarithmique.**

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

Décrément logarithmique : $\delta = \ln\left[\frac{y(t)-y(\infty)}{y(t+T)-y(\infty)}\right] = ln\left[\frac{1}{e^{-\lambda T}}\right] = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q}T$

avec *y(t)* et *y(t+T)* valeurs de 2 « maxima » successifs

6) Donner les analogies mécanique – électricité.

Mécanique	**Electricité**
Position x (m)	Charge q (C)
Vitesse v (m.s^{-1})	Intensité i (A)
Masse m (kg)	Inductance L (H)
Raideur k (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité C (F)
Frottement h (N.m^{-1}.s)	Résistance R (Ω)
Force F (N)	Tension u (V)

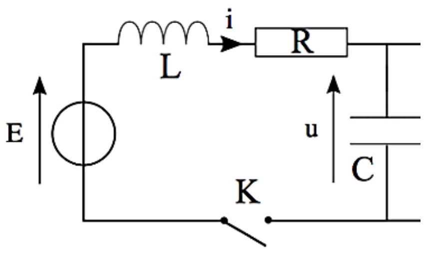
7) Définir l'enthalpie massique de changement d'état, ou chaleur latente, à la température T, et donner son unité.

Différence entre les enthalpies massiques du corps pur dans la phase 2 et dans la phase 1 à T, correspondant à la variation d'enthalpie par kg de corps subissant le changement d'état à la température T sous la pression atmosphérique.

$\boxed{\Delta_{1\to 2}h(T) = h_2(T) - h_1(T) = l_{1\to 2}(T) = -\Delta_{2\to 1}h(T)}$ Unité : J.kg^{-1}

Démos de cours :

8) Pour le circuit ci-contre (interrupteur fermé à t = 0) : Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. La mettre sous forme canonique, identifier les constantes introduites.



Appliquer la loi des mailles : $E - u_L - u_R - u = 0$

Appliquer la loi entre u et i pour chaque récepteur. $u_L = L\frac{di}{dt}$; $i = C\frac{du}{dt}$; $u_R = R.i$

On obtient sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}E$$

On identifie à la forme canonique suivante :

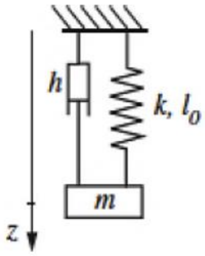
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E$$

On détermine par identification :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre (rad.s^{-1})

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur de qualité (sans dimension)

9) Pour le système masse-ressort amorti ci-contre, on écarte la masse de sa position d'équilibre ; déterminer l'équation du mouvement. La mettre sous forme canonique ; identifier les constantes introduites.



Graduer axe z vers le bas.

Prendre l'origine de l'axe au point de fixation du ressort.

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : Masse *m*.

Bilan des forces extérieures appliquées :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

Force de rappel élastique : $\vec{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_s}$ avec $\overrightarrow{u_s}$ vecteur sortant du ressort.

$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_z}$ et $l = z$

On obtient : $\vec{F} = -k(z - l_0)\overrightarrow{u_z}$

Force de frottement fluide : $f = -h\vec{v} = -h\dot{z}\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

En projetant sur z on obtient :

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On identifie à la forme canonique suivante :

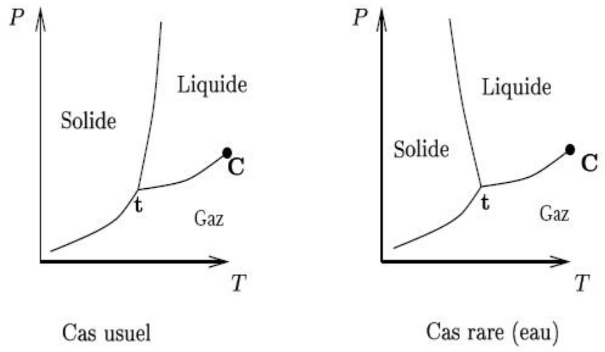
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + {\omega_0}^2 z = g + \frac{k}{m}l_0$$

On détermine par identification :

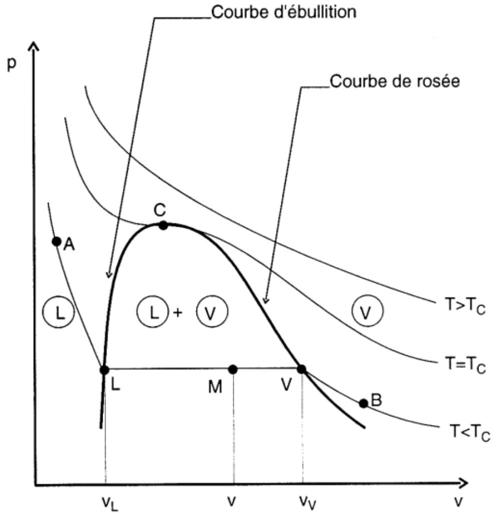
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre (rad.s⁻¹)

$Q = \frac{1}{h}\sqrt{mk}$ facteur de qualité (sans dimension)

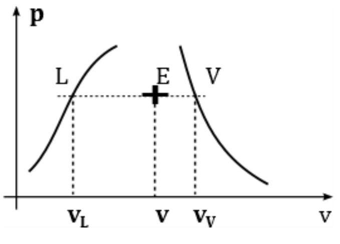
10) Diagramme de phase (P, T) d'une espèce diphasée : **tracer l'allure du diagramme**, placer les phases Solide S, Liquide L, Gazeuse G, le point triple t, le point critique C.



11) Diagramme de Clapeyron (P, v) d'une espèce diphasée (**fourni**) : savoir placer les phases Liquide L, Gazeuse G , la zone d'équilibre liquide vapeur LG, savoir tracer une isotherme, identifier la courbe d'ébullition, la courbe de rosée.



12) A partir du diagramme (P, v) fourni ci-contre, déterminer le titre en vapeur (= démontrer le théorème des moments).



Soit V le volume total occupé par la masse totale m, V_V et V_L respectivement les volumes occupés par les phases liquide et gaz.

V grandeur extensive, et les phases liquide et vapeur sont disjointes, d'où $V = V_L + V_V$

En introduisant les volumes massiques v_V et v_L :

$$V = V_L + V_V = m_V v_V + m_L v_L.$$

En introduisant le titre en vapeur x_V :

$$m_V = x_V m \qquad \text{et} \qquad m_L = x_L m = (1 - x_V)\, m,$$

d'où

$$V = x_V m\, v_V + (1 - x_V)\, m\, v_L = m(x_V\, v_V + (1 - x_V)\, v_L).$$

Finalement, $\frac{V}{m} = v = x_v v_v + (1 - x_v) v_L$ soit

$$x_v = \frac{v - v_L}{v_v - v_L}$$

Dans un diagramme (P, v) avec une **échelle linéaire** en abscisse : $x_v = \frac{LE}{LV}$ (Théorème des moments).

13) (Exercice 5 TD T4) Un ballon de $10{,}0\ m^3$ contient $169\ kg$ d'eau sous $10{,}0\ bar$.

Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante	**Volume massique**		**Enthalpie massique**	
$P = 10\ bar$	liquide	vapeur	liquide	vapeur
$\theta = 179{,}86°C$	$v_l(m^3.kg^{-1})$	$v_v(m^3.kg^{-1})$	$h_l(kJ.kg^{-1})$	$h_v(kJ.kg^{-1})$
	$1{,}127.10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

Exercice 5 : État d'un système déterminé à partir d'un extrait de table.

$$v = \frac{V}{m} = \frac{10}{169} = 59{,}2.10^{-3}\ m^3.kg^{-1}$$

$\Rightarrow v_l < v < v_v$

$\Rightarrow$ Mélange diphasique liquide-vapeur

$\Rightarrow P = P_{SAT} = 10\ bar$

$T = T_{SAT} = 179{,}86\ °C$

$$x = \frac{h - h_L}{h_v - h_L} \quad \ldots\ h \text{ non connue}$$

ou

(*) $$x = \frac{v - v_L}{v_v - v_L} = \frac{59{,}2.10^{-3} - 1{,}127.10^{-3}}{0{,}1947 - 1{,}127.10^{-3}} \simeq 0{,}30$$

$$\begin{aligned} h &= x_L h_L + x_v h_v \\ &= (1 - x_v) h_L + x_v h_v \\ &= (1 - 0{,}30) \times 761{,}2 + 0{,}30 \times 2772 \\ &= 1364\ kJ.kg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H = m.h &= 169 \times 1364 \\ &= 230.10^3\ kJ = 230\ MJ \end{aligned}$$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

4. Oscillations libres	
Interprétation avec le graphe de l'énergie potentielle	Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
Oscillateur non amorti	Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique. Étude expérimentale d'un oscillateur harmonique.
Portrait de phase	Interpréter un portrait de phase fourni ou relevé expérimentalement.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 2	Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides. Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique. Identifier les différents régimes et exploiter les courbes. Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1. Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement.

Enthalpie de changement d'état d'un corps pur	Connaître le vocabulaire des changements d'état et le diagramme (p, T). Comparer les ordres de grandeurs des variations d'enthalpie des systèmes monophasés avec celles des changements d'état d'un corps pur. Calculer l'énergie récupérable lors d'un changement d'état d'un corps pur à pression constante.