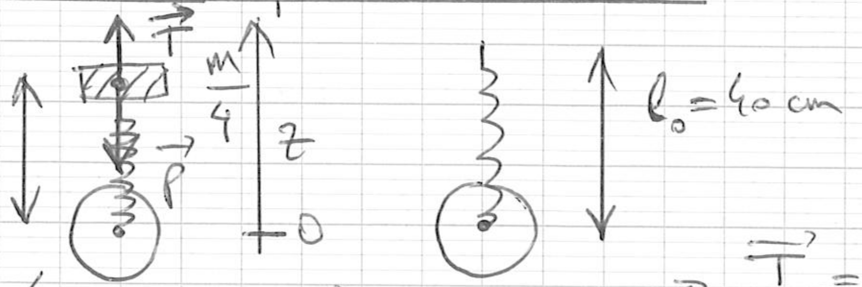
Exercice 8 : Suspension d'une voiture

1) l_{eq}

$l_{eq} < l_0$



↳ PFS : $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ avec $\vec{T} = -k(l_{eq} - l_0)\vec{u_z}$ et $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$

d'où : $-k(l_{eq} - l_0) - \frac{mg}{4} = 0$

$\Leftrightarrow -k\underbrace{(l_{eq} - l_0)}_{-d} = \frac{mg}{4}$

$\Leftrightarrow kd = \frac{mg}{4}$ $\qquad$ $\underline{k = \frac{mg}{4d}}$

AN : $k = \frac{1200 \times 10}{4 \times 0,25} = 12.10^3 \ N.m^{-1}$

2) Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$

$m' = \frac{m}{4}$

Avec : $Q = \frac{1}{h}\sqrt{km'} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{m^2 g}{4 \times 4d}} = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{g}{16d}} = \frac{m}{4h}\sqrt{\frac{g}{d}}$

On en déduit :

$$\underline{h = \frac{m}{4Q}\sqrt{\frac{g}{d}}}$$

AN:

$Q = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $h = \sqrt{\frac{10}{0,25}} \times \frac{1200}{2} = \sqrt{40} \times 600 = 3,8.10^3 \ kg.s^{-1}$

3) Eq. diff :

$m' = \frac{m}{4}$

$E_{pp} = m'gz + cte$

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$

$E_c = \frac{1}{2}m'\dot{z}^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{fr} = -hv^2 = -h\dot{z}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(E_{pp} + E_{pe} + E_c\right) = -h\dot{z}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(m'gz + cte + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 + \frac{1}{2}m'\dot{z}^2\right) = -h\dot{z}^2$$

$$m'g\dot{z} + k\dot{z}(z-l_0) + m'\ddot{z}\dot{z} = -h\dot{z}^2$$

$$\dot{z}\left(m'g + kz - kl_0 + m'\ddot{z} + h\dot{z}\right) = 0$$

$\dot{z} = 0$ non retenu

ou $m'g + kz - kl_0 + m'\ddot{z} + h\dot{z} = 0$

$$m'\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -m'g + kl_0$$

Identification :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m'}}$

$Q = \frac{1}{h}\sqrt{m'k}$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m'}\dot{z} + \frac{k}{m'}z = -g + \frac{kl_0}{m'}$$

$$= \frac{k}{m'}\underbrace{\left(-\frac{m'g}{k} + l_0\right)}_{l_{eq}}$$

CI : $z(0) = l_{eq} - d'$

$\dot{z}(0) = 0$

En remplaçant m' par $\frac{m}{4}$:

$$\ddot{z} + \frac{h}{\left(\frac{m}{4}\right)}\dot{z} + \frac{k}{\left(\frac{m}{4}\right)}z = -g + \frac{kl_0}{\left(\frac{m}{4}\right)}$$

$$\ddot{z} + 4\frac{h}{m}\dot{z} + 4\frac{k}{m}z = -g + \frac{4kl_0}{m}$$

3) On pose $Z = z - l_{eq}$ (Z = "écart par rapport à la position d'équilibre").
$\dot{Z} = \dot{z}$
$\ddot{Z} = \ddot{z}$

On obtient

$$\ddot{Z} + \frac{h}{m'}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

CI : $\left\| \begin{array}{l} Z(0) = -d' \\ \dot{Z}(0) = 0 \end{array} \right.$

SEH : $Z_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ (Régime critique).
SP : $Z_P = 0$
SG : $\underline{Z(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}}$

$\dot{Z}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0(At + B)e^{-\omega_0 t}$

d'où :

$Z(0) \overset{\text{maths}}{=} B \overset{\text{CI}}{=} -d'$
$\dot{Z}(0) = A - \omega_0 B = 0$
$\Rightarrow \underline{A = \omega_0 B = -\omega_0 d'}$

D'où :

$$Z(t) = (-\omega_0 d' t - d')e^{-\omega_0 t}$$

$$\underline{Z(t) = -d'(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$

Avec : $\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m'}} = \sqrt{\frac{k'}{\frac{m}{4}}} = 2\sqrt{\frac{k'}{m}}}$

A.N. : $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = \cancel{2}\sqrt{\frac{\cancel{m}g}{\cancel{4}d\cancel{m}}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$
$= \sqrt{\frac{10}{0,25}} = \sqrt{40} = \underline{6,3 \text{ rad.s}^{-1}}$

4) Avec $m_2 = 1700$ kg.

$$\omega_{0_2} = 2\sqrt{\frac{k}{m_2}} = 2\sqrt{\frac{12.10^3}{1700}} = \underline{5,3 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{h}\sqrt{m_2' k}$$

$$= \frac{1}{3,8.10^3}\sqrt{\frac{1700}{4} \times 12.10^3} = \underline{0,59}$$

Regime pseudo-periodique.

5) La réponse $Z(t)$ devient :

$$Z(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)$$

$$z(t) = Z(t) + l_{eq}$$

$$= l_{eq} + e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)$$

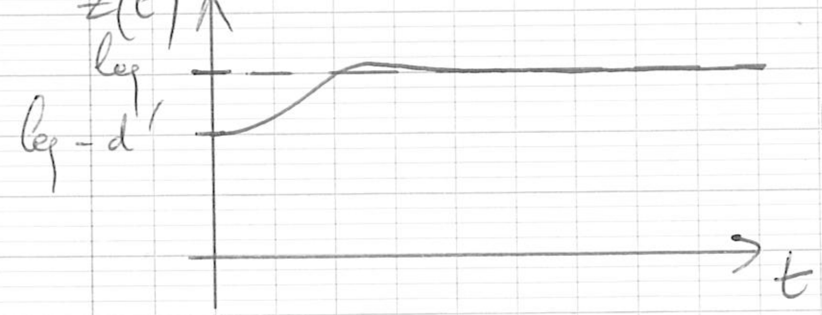
Avec $l_{eq} = 15$ cm

$$z(0) = Z(0) + l_{eq} = l_{eq} - d' = 15 - 5 = 10 \text{ cm}$$

$$\dot{z}(0) = \dot{Z}(0) = 0$$

Réponse : regime très legèrement pseudo-periodique

$\Leftrightarrow$ Très léger dépassement.

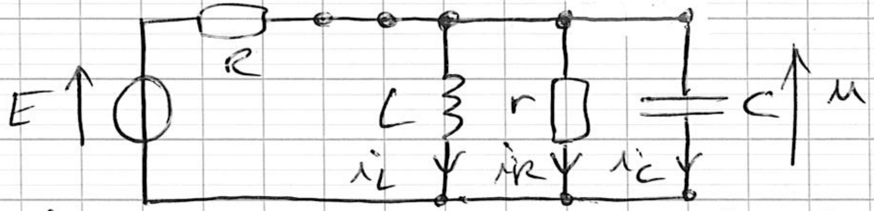


Tracé pour $m = 1700$ kg

DM RT / OH

Problème 1

1. $\underline{t = 0^+}$



Condensateur initialement déchargé

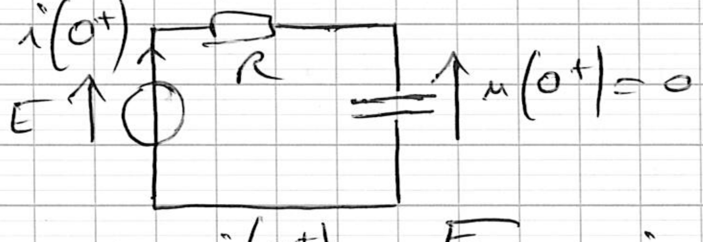
$\Rightarrow u(0^+) = u(0^-) = 0$ $\qquad \underline{u(0^+) = 0}$

$\Rightarrow \underline{i_R(0^+)} = \dfrac{u(0^+)}{R} = \underline{0}$

Bobine initialement démagnétisée

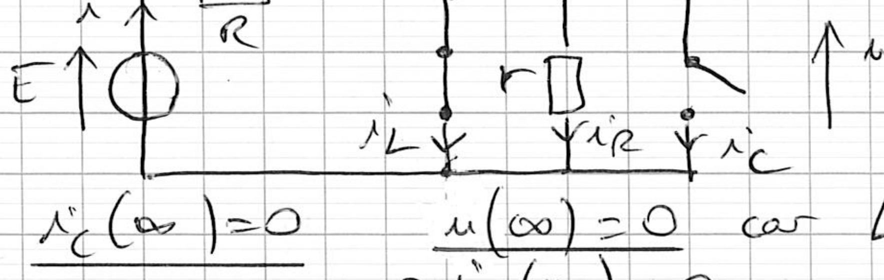
$\Rightarrow \underline{i_L(0^+)} = i_L(0^-) = \underline{0}$

D'où : simplification en $t = 0^+$



$$\Rightarrow \underline{i(0^+) = \frac{E}{R} = i_C(0^+)}.$$

$\underline{t \to +\infty}$



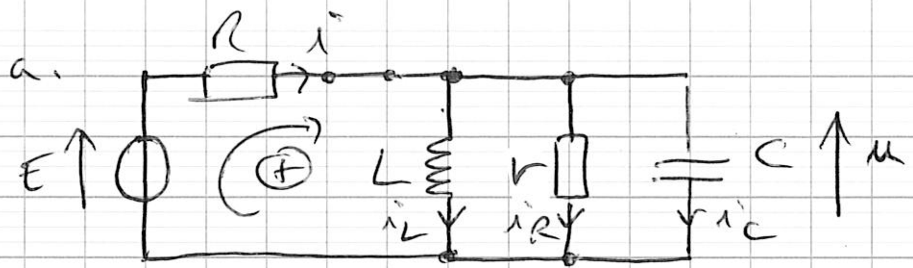
$\underline{i_C(\infty) = 0}$ $\qquad \underline{u(\infty) = 0}$ car $L \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \underline{i_R(\infty) = 0}$

d'où :

$$\underline{i(\infty) = i_L(\infty) = \frac{E}{R}}$$

2. a.



Loi des noeuds : $i = i_L + i_R + i_C$

Lois : $u = L\frac{di_L}{dt}$ $u = r i_R$ $i_C = C\frac{du}{dt}$

Loi des mailles :

$$E - Ri - u = 0$$

$$E - R(i_L + i_R + i_C) - u = 0$$

On dérive par rapport au temps :

$$0 - R\frac{di_L}{dt} - R\frac{di_R}{dt} - R\frac{di_C}{dt} - \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{R}{L}u + \frac{R}{r}\frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$$

c'est-à-dire :

$$RC\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{r}\right)\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u = 0$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R+r}{RrC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$\frac{R+r}{RrC} \to \frac{\omega_0}{Q}$ ou 2λ $\qquad \frac{1}{LC} \to \omega_0^2$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{LC}} \frac{\cancel{2}Rrc}{(R+r)}$$

$$Q = \frac{Rr}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

d'où : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\lambda = \frac{R+r}{2RrC}$$

$$\xi = \frac{1}{2Q} = \frac{R+r}{Rr}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

b). Il faut : $Q > \frac{1}{2}$, $2Q > 1$

$\frac{1}{2Q} < 1$, $\frac{\omega_0}{2Q} < \omega_0$

c'est à dire $\lambda < \omega_0$

$$\frac{R+r}{2RrC} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{R+r}{2Rr} < \sqrt{\frac{C}{L}}$$

c) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20.10^{-3} \times 10^{-6}}} = \underline{7,1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 8,9.10^{-4} \text{ s} = \underline{0,89 \text{ ms}}$.

$\lambda = \frac{(2,5+1,25)10^3}{2 \times 2,5.\cancel{10^3} \times 1,25.\cancel{10^3} \times \cancel{10^{-6}}} = \underline{6.10^2 \text{ s}^{-1}}$

λ = facteur d'amortissement.

d) $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$= \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

$\omega_0 \gg \lambda$

d'où $\Omega \simeq \omega_0$

e - $u(t) = \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] e^{-\lambda t}$

CI : $\begin{cases} u(0) = 0 & \text{CI1} \\ \dfrac{du}{dt}(0) = \dfrac{i_C(0^+)}{C} = \dfrac{E}{RC} & \text{CI2} \end{cases}$

CI1 $\Rightarrow$ $\underline{A = 0}$

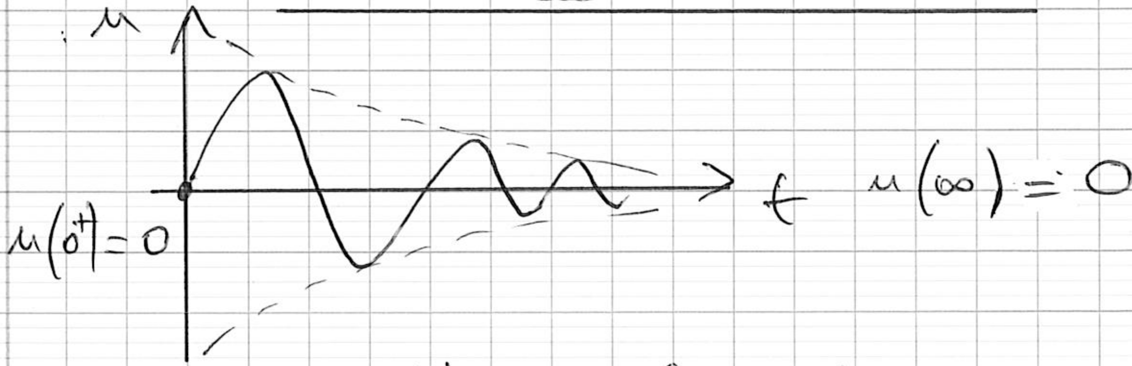
$\Rightarrow u(t) = B\sin(\Omega t) e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}(t) = -\lambda B \sin(\Omega t) e^{-\lambda t} + \Omega B \cos(\Omega t) e^{-\lambda t}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = \Omega B = \frac{E}{RC}$$

$$\Rightarrow \underline{B = \frac{E}{RC\Omega}}$$

d'où : $\underline{u(t) = \dfrac{E}{RC\Omega} \sin(\Omega t) e^{-\lambda t}}$



$$i(t) = \frac{E - u(t)}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{1}{RC\Omega}\sin(\Omega t) e^{-\lambda t}\right)$$