M5 OSCILLATIONS FORCEES

Notions et contenus	Capacités exigibles
13. Oscillations forcées	
Régime sinusoïdal forcé	Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal. Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant. Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels. Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude.
Analogies électromécaniques	Montrer que le modèle reste pertinent pour des systèmes mécaniques ou électriques où les équations décrivant le système sont données.
Généralisation aux signaux périodiques	Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.

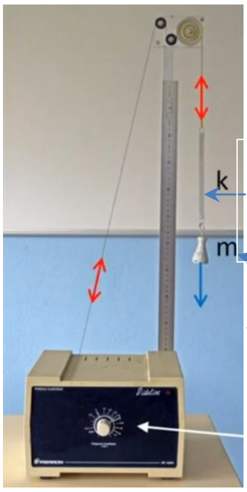
I. OSCILLATEURS AMORTIS EN REGIME FORCE

A) Manipulation : étude d'un oscillateur mécanique vertical

1) Rappels

- Signal **périodique** : tel que $\forall\, t, X(t+T) = X(t)$, avec $\boldsymbol{T}$ **période** du signal.
- Signal périodique **alternatif** : La valeur moyenne du signal est nulle sur une période.
- Signal **sinusoïdal** : tel que

Un signal alternatif est un cas particulier de signal périodique, un signal sinusoïdal un cas particulier de signal alternatif.



Oscillateur mécanique

Point d'accroche A, soumis à un mouvement sinusoïdal dans la manip 2)

Système masse - ressort

1) En oscillations libres
2) En oscillations forcées Avec un **excitateur sinusoïdal** de fréquence variable

2) Oscillations en régime libre

Période $\boldsymbol{T}$: telle que la pulsation $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ est très proche de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'oscillateur étant faiblement amorti

3) Oscillations en régime sinusoïdal forcé

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

Extrémité supérieure animée d'un mouvement vertical sinusoïdal grâce à l'excitateur auquel elle est reliée, le bas étant initialement au repos.

Après une période transitoire, on observe que les oscillations sont entretenues : grâce à l'excitateur, on apporte de l'énergie au système, permettant de compenser les pertes dues aux frottements.

A basse fréquence : amplitude **de l'ordre de celle de l'excitation, pulsation de l'excitation**

A haute fréquence : amplitude **quasi nulle,** l'excitation varie trop vite pour permettre au système de suivre

Aux fréquences moyennes : passage par des oscillations **d'amplitude particulièrement élevée,** nettement supérieure à l'amplitude de l'excitation, pulsation de l'excitation

L'amplitude des oscillations passe par un maximum à une fréquence donnée : **phénomène de résonance en amplitude**.

4) Autres exemples de phénomènes de résonance

■ **Exemples de résonances mécaniques**

Résonance Pont de Tacoma : Pont Tacoma - Résonance mécanique

■ **Observation expérimentale du circuit RLC série**

B) Oscillations mécaniques forcées en régime sinusoïdal

1) Mise en équation dans le cas général

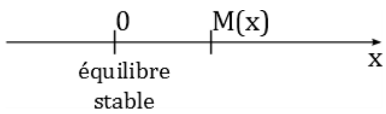
a) Description du système étudié

Dans tout le chapitre, $M(m)$ est un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}_{gal}$ galiléen repéré par un unique paramètre. On supposera par exemple que M se déplace sur l'axe $(x'x)$ et qu'il est repéré par son abscisse x.

■ **Bilan des forces subies par $\mathbf{M(m)}$**

M est supposé soumis à :

- Une **force conservative** $\vec{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f_x}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ dérivant d'une **énergie potentielle** $E_p(x)$ (éventuellement résultante de plusieurs forces) **présentant un minimum en** $x = 0$ origine de l'axe : position d'équilibre stable).



- Une **force de frottement fluide** $\overrightarrow{F_{frot}} = -h\vec{v}$.
- Une **force excitatrice sinusoïdale** de pulsation ω : $\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F_m}\cos\left(\boldsymbol{\omega t}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}},\quad$ avec $F_m > 0$

■ **Expression de la force conservative :**

Pour une force conservative, on a $\quad dE_p = -\vec{f}\cdot d\overrightarrow{OM}\quad$ et $\; f_x = -\frac{dE_p}{dx}$

Au voisinage de la position d'équilibre stable, l'énergie potentielle est parabolisable :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2\,, \quad \text{avec} \qquad k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0} > 0$$

Ce qui donne pour la force, toujours au voisinage de la position d'équilibre stable O : $\quad f_x = -kx \quad$ **et** $\quad \vec{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{kx}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$

On écrira éventuellement cette force excitatrice sous la forme : $\vec{F} = F_m\cos\left(\omega t\right)\vec{e}_x = kX_0\cos\left(\omega t\right)\vec{e}_x$, avec $X_0 > 0$

b) Équation différentielle liant position et temps

■ **Méthode N°1 : À partir de la seconde loi de Newton (PFD)**

■ **Méthode N°2 : Approche énergétique**

Énergie mécanique : $\qquad E_m =$

Théorème de la puissance mécanique :

Forme canonique de l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t) = \frac{k}{m}X_0\cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Equation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants avec second membre sinusoïdal.

ω_0 est la pulsation propre — unité : rad/s

Q est le facteur de qualité — sans unité

Ici, on obtient

C) Méthode pour la résolution de l'équation différentielle

1) Solution générale de l'équation différentielle

Les solutions de cette équation différentielle s'obtiennent en additionnant :

- la Solution de l'Équation Homogène (SEH)
- une Solution Particulière (SP)

■ **SEH**

Trois types de solutions différentes selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique (ou selon la valeur de Q)	$x = A\ \exp(r_1 t) + B\ \exp(r_2 t)$, r_1 et r_2 étant deux réels négatifs
	$x = (A + Bt)\ \exp(-\omega_0 t)$
	$x = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times (A\ \cos(\Omega t) +\ B\sin(\Omega t))$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Dans tous les cas, en présence de frottement ($\boldsymbol{Q > 0}$ et $\boldsymbol{Q} \neq \infty$), la solution générale de l'équation homogène, caractérisant le régime transitoire, tend vers $\mathbf{0}$: régime transitoire amorti (limité dans le temps).

■ **SP :** Elle doit être cherchée sous la forme du second membre (l'excitation), soit ici sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation que l'excitation : $\boldsymbol{x = X_M\cos(\omega t + \varphi)}$.

■ **SG:**

$$x = \begin{cases} A\ \exp(r_1 t) + B\ \exp(r_2 t),\ r_1 \text{ et } r_2 \text{ étant deux réels négatifs} \\ (A + Bt)\ \exp(-\omega_0 t) \\ \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times (A\ \cos(\Omega t) +\ B\sin(\Omega t)) \quad \text{avec } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{cases} \boldsymbol{+ X_M\cos(\omega t + \varphi)}$$

solution transitoire **solution forcée**

2) Solution forcée de l'équation différentielle

Au bout d'un certain temps, la solution transitoire s'annule et seule demeure la solution forcée.

On ne s'intéresse ici qu'à la recherche de la solution sinusoïdale forcée, on ne cherche pas à déterminer le transitoire, on n'a donc pas besoin de connaître les conditions initiales (utiles pour déterminer A et B).

L'excitation sinusoïdale de pulsation ω imposera donc sa pulsation et, après un régime transitoire limité dans le temps (dont on ne s'occupe pas), la **réponse** sera une fonction **sinusoïdale de pulsation la pulsation ω de l'excitation.**

On cherchera directement la solution forcée sous la forme :

Les inconnues à déterminer sont donc :

X_M :

φ :

Elles peuvent être déterminées à partir de l'équation différentielle régissant la grandeur X ; pour éviter la complexité des calculs sur les fonctions trigonométriques, on choisit de représenter ces fonctions dans le plan cartésien (représentation de Fresnel) ou dans le **plan complexe**.

3) Représentation des signaux sinusoïdaux à l'aide des nombres complexes

a) Principe

Afin de simplifier les calculs, on introduit des grandeurs complexes formées à partir des grandeurs réelles, qui sont des intermédiaires de calcul, et à partir desquels on peut retrouver les différentes caractéristiques des grandeurs réelles, et en particulier l'amplitude et la phase à l'origine.

■ **Amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$**

L'amplitude complexe temporelle $\underline{\boldsymbol{X(t)}}$ associée à la grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est par définition

En pratique, pour retrouver les caractéristiques de la grandeur réelle, on utilise :

■ **Amplitude complexe $\underline{X_m}$**

On pose $\underline{\boldsymbol{X(t)}} = \underline{\boldsymbol{X_m}}\boldsymbol{e^{i\omega t}}$ soit $\underline{\boldsymbol{X_m}} = \boldsymbol{X_m e^{i\varphi}}$

On a alors

b) Représentation graphique de la notation complexe

c) Intérêt : opérations sur les nombres complexes

- **Linéarité**

Soient 2 signaux $x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$, auxquels on associe les grandeurs complexes $\underline{x_i(t)}$ et $\underline{X_{mi}}$

Si $x(t) = \lambda\, x1(t) + \beta x2(t)$, alors on montre que $\underline{x(t)} = \lambda\, \underline{x_1}(t) + \beta \underline{x_2}(t)$ et $\underline{X_m} = \lambda \underline{X_{m1}} + \beta \underline{X_{m2}}$

Attention ! L'amplitude d'une somme **n'est pas** simplement égale à la somme des amplitudes !

- **Intégration et dérivation**

Cherchons les amplitudes complexes associées aux dérivées de $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

On a $\frac{dX}{dt} =$

Les amplitudes complexes temporelles associées sont $\underline{X}(t) =$ et $\dot{\underline{X}}(t) =$

Or $e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$, soit $\dot{\underline{X}}(t) =$

De même, $\ddot{\underline{X}}(t) =$

Toutes les équations écrites avec des grandeurs instantanées **réelles** restent **valables en** grandeurs instantanées **complexes.**

- **Dérivation par rapport à** t d'une grandeur instantanée complexe ⟺
- **Intégration par rapport à** t d'une grandeur instantanée complexe ⟺

Une **équation différentielle** devient donc une **équation algébrique** pour les amplitudes complexes associées, à la résolution beaucoup plus simple.

Remarque : L'étude du régime sinusoïdal forcé à l'aide de l'outil complexe constitue un cas particulier de ce qui est vu en génie électrique de variable de Laplace avec $p = i\omega$

d) Lien entre équations différentielles et équation complexe

- Grâce à ces règles de calcul, il faut **savoir passer d'une équation différentielle à son équation algébrique complexe associée, et réciproquement**
- Il ne faut pas perdre de vue que cette équation complexe n'est qu'un **moyen mathématique commode** traduisant le comportement physique réel du système, lequel est décrit par l'équation différentielle. Par ailleurs, la **solution complexe n'est que la partie permanente du régime forcé, c'est-à-dire la solution particulière de l'équation différentielle ;** toute étude du **régime transitoire ne pourra se faire qu'avec l'équation différentielle réelle.**

II. REPONSES EN AMPLITUDE ET EN VITESSE - RESONANCES

A) Réponse fréquentielle en amplitude

1) Amplitude complexe de l'élongation du point

$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2\, X_0 \cos(\omega t)$ passage aux complexes

A partir de l'équation différentielle, on établit l'amplitude complexe de l'élongation :

$$\boxed{\boldsymbol{X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right)}}}$$

Expression à savoir établir, mais pas à apprendre par cœur !

On peut simplifier cette expression en introduisant une grandeur adimensionnelle proportionnelle à ω.

■ **Pulsation réduite**

$\boldsymbol{u} =$ proportionnelle à la pulsation excitatrice

On en déduit $X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M =$

$$\boxed{\boldsymbol{X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}}}$$

2) Amplitude réelle de l'élongation

a) Expression de l'amplitude réelle en fonction de la fréquence

On limite l'étude à la réponse en amplitude réelle de l'élongation de l'oscillateur.
A partir de l'amplitude complexe de l'élongation en réponse à une excitation sinusoïdale de pulsation $\omega = u\,\omega_0$:

$$X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$$

Amplitude réelle du mouvement oscillant forcé :

$$X_M = |\underline{X}_M| =$$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{X_M(u) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}}}$

Expression à savoir établir, mais pas à apprendre par cœur !

On introduit **l'amplitude relative (ou gain) :** $\boldsymbol{G = \frac{X_M}{X_0}}$ (grandeur adimensionnelle) ; elle permet d'exprimer des résultats indépendants de la valeur de l'amplitude X_0 de l'excitation.

Ici : $G(u) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$.

b) Étude asymptotique

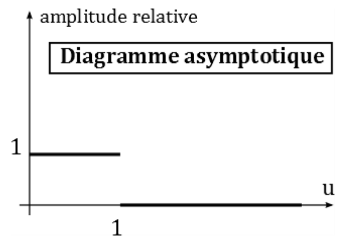
Fréquence excitatrice : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u\omega_0}{2\pi} = uf_0$

On va chercher **les limites de cette réponse** pour des **fréquences faibles ($\boldsymbol{u \ll 1}$)** ou **élevées ($\boldsymbol{u \gg 1}$)**.

■ **Asymptote à basse fréquence : $\boldsymbol{u \ll 1}$**

■ **Asymptote à haute fréquence : $\boldsymbol{u \gg 1}$**

- Tracé des asymptotes du graphe donnant l'amplitude relative $G = \frac{X_M}{X_0}$ en fonction de u



- Les excitations à haute fréquence donnent une réponse nulle en amplitude, elles sont « coupées ».
- Les excitations à basse fréquence donnent une réponse non nulle en amplitude, elles « passent ».

Comportement de **filtre passe-bas** (d'ordre 2), comme en électricité.

c) Amplitude en $\omega = \omega_0$

Amplitude réelle : $X_M(u) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$

En $u = 1$, soit $\omega = \omega_0$, on obtient :

D'après l'étude asymptotique, on voit donc que si $Q > 1$, la courbe présentera nécessairement un maximum d'élongation, d'autant plus important que le facteur de qualité Q est élevé (l'amplitude peut alors devenir très importante). On dit qu'il y a **résonance en élongation**.

- **Résonance**

En revanche, si Q est faible, la courbe ne présentera pas de résonance.

Nous allons étudier de manière systématique ce phénomène de résonance, en précisant la condition sur Q d'existence du phénomène de résonance, et lorsqu'il existe, la fréquence de résonance ainsi que la valeur de l'amplitude maximale.

B) Etude de la résonance en élongation

1) Condition d'existence de la résonance et fréquence de résonance

Expression de X_M en fonction de la pulsation réduite : $X_M = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$

On s'intéresse aux variations de X_M avec u.

Le numérateur de X_M est une constante positive, on peut donc simplifier l'étude en étudiant le dénominateur de X_M, et même le carré de celui-ci.

On définit $D(u) =$; de sorte que $X_M = \frac{X_0}{\sqrt{D(u)}}$

L'amplitude est alors maximale pour une fréquence telle que le dénominateur $D(u)$ est minimal.

Il faut donc chercher la pulsation réduite u telle que $\frac{dD}{du} = 0$

$\frac{dD}{du} =$

$\frac{dD}{du}$ s'annule en $u = 0$ et, **éventuellement**, selon le signe de $1 - \frac{1}{2Q^2}$, en $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$:

$1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow$

$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow$

- **Premier cas :** $\boldsymbol{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

u	0		$+\infty$
$\frac{dD}{du}$	0	> 0	
$D(u)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$X_M(u)$	X_0	$\searrow$	0^+

$X_M(u)$ décroît si la pulsation augmente, **pas de phénomène de résonance**.

- **Second cas :** $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

u	0		$\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$\frac{dD}{du}$	0	< 0	0	> 0	
$D(u)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$
$X_M(u)$	X_0	$\nearrow$	$\frac{Q\,X_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$	$\searrow$	0^+

Il y a **résonance en élongation**

en $\boldsymbol{u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$,

soit **en** $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

- **Premières caractéristiques de la résonance en élongation**

- La **résonance en élongation** est **soumise à condition** :
- Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la pulsation de résonance est $\boldsymbol{\omega_r} =$
- La pulsation de résonance est toujours inférieure à la pulsation propre de l'oscillateur : $\boldsymbol{\omega_r < \omega_0}$
- Pour les facteurs de qualité suffisamment élevés ($Q > 5$ à 10), $\boldsymbol{\omega_r \approx \omega_0}$

2) Amplitude de l'élongation à la résonance

- **Calcul de $(X_M)_{max}$:**

Lorsqu'il y a résonance, soit pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude maximale est obtenue pour la pulsation réduite de résonance, soit $u_r = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$; sinon, elle est obtenue pour $u = 0$.

Avec $X_M = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$, $(X_M)_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{D_{min}}}$.

Pour $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\quad D_{min} = D(0)$ avec $\quad D(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2 \quad$ et $\; D(0) = 1 \quad$ soit avec $\; (X_M)_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{D_{min}}}$

$$\boxed{(X_M)_{max} = X_0}$$

Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\quad D_{min} = D(u_r)$ avec $\quad D(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2 \quad$ et $\; u_r = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \quad$ soit $\quad {u_r}^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

$$D_{min} = D(u_r) = (D\left(\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\right) = \left(1-1+\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}{Q}\right)^2 = \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{2Q^4}\right) = \frac{1}{Q^2}+\frac{1}{4Q^4}-\frac{1}{2Q^4} = \frac{1}{Q^2}-\frac{1}{4Q^4}$$

Soit $\quad D_{min} = \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) \quad$ d'où $\quad (X_M)_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{D_{min}}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}}$

On obtient pour l'amplitude maximale des oscillations forcées : $\boxed{\boldsymbol{(X_M)_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} X_0}}$

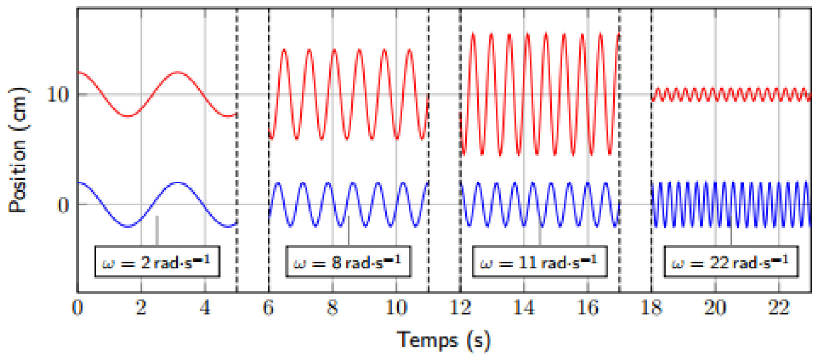


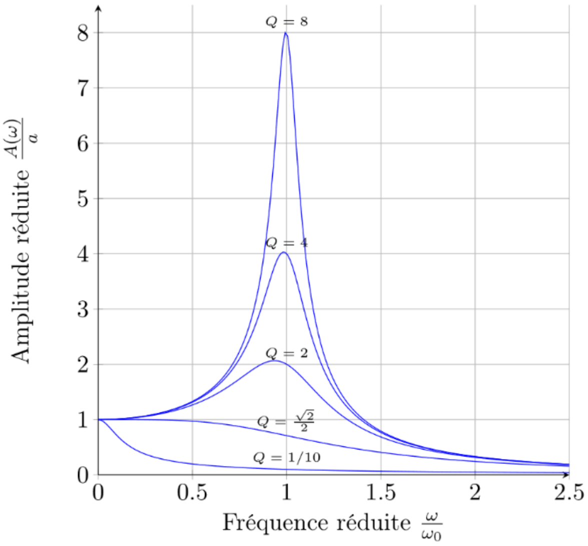
FIGURE 7 – Évolution au cours du temps de la position de la masse en régime permanent (en rouge) pour différentes pulsations d'excitations ω du support

Remarque : l'amplitude d'élongation peut devenir très importante, très supérieure à l'amplitude à basse fréquence.

Le rapport entre ces 2 amplitudes est $\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ qui est de l'ordre de Q si Q vaut ou dépasse quelques unités.

3) Allure des courbes

Ci-dessous, les **courbes $\boldsymbol{X_M(\omega)}$ pour différents facteurs de qualité**.



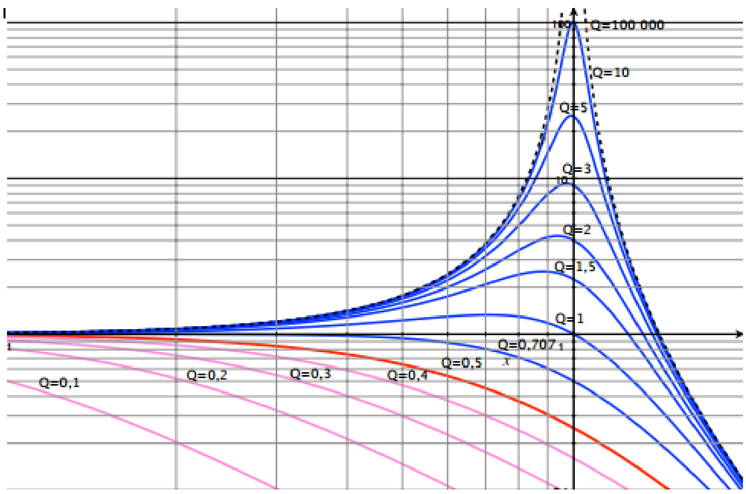


Diagramme logarithmique (cf. diagramme de Bode)

■ **Caractéristiques de la résonance en élongation**

- La **résonance en élongation** est **soumise à condition** : elle n'existe que pour les facteurs de qualité suffisamment élevés, soit pour $\boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ **;**
- Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a **résonance en élongation** pour la **pulsation de résonance** est $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$;

- La pulsation de résonance est donc toujours inférieure à la pulsation propre de l'oscillateur : $\boldsymbol{\omega_r < \omega_0}$
- Le gain à la résonance est toujours supérieur à 1 : $G_{max} > \mathbf{1}$,
- Pour les facteurs de qualité $Q >> 1$ suffisamment élevés ($Q > 5$ à 10), $\boldsymbol{\omega_r \approx \omega_0}$ **et** $\boldsymbol{G_{max} \approx Q}$
- Le facteur de qualité caractérise l'acuité de la résonance ; **plus Q est grand** (donc plus l'amortissement est faible), plus ω_r tend vers ω_0, et **plus le gain maximum (donc l'amplification) est grand.**

C) Résonance en vitesse

Vitesse : dérivée de la position du point par rapport au temps, soit : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

En **notation complexe** : $\underline{\boldsymbol{v}} =$

Amplitude complexe de la vitesse : $\underline{V_M} = V_M \exp(i\varphi') = i\omega \underline{X_M} = i\omega X_m \exp(i\varphi)$

En introduisant la pulsation réduite avec $\omega = u\omega_0$, et en exploitant $-u^2 = (iu)^2$ ainsi que $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$:

$$\underline{V_M} = V_M \exp(i\varphi') = i\omega X_m \exp(i\varphi) =$$

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{V_M}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{V_M} \exp(\,\boldsymbol{i\varphi'}) = \frac{\boldsymbol{\omega_0 X_0}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{i}\left(\boldsymbol{u} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}}\right)} = \frac{\boldsymbol{\omega_0 X_0 Q}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{iQ}\left(\boldsymbol{u} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}}\right)}}$$

Soit, en fonction de ω :
$$\boxed{\underline{\boldsymbol{V_M}}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{V_M} \exp(\,\boldsymbol{i\varphi'}) = \frac{\boldsymbol{\omega_0 X_0}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{i}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_0}} - \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\boldsymbol{\omega}}\right)}}$$

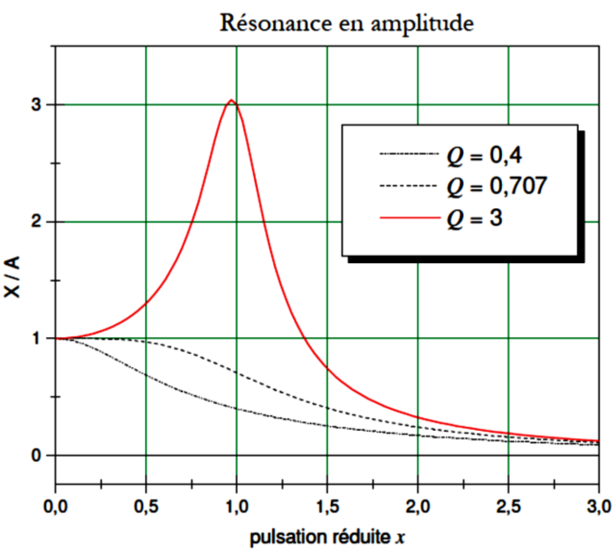
Expression à savoir établir, mais pas à apprendre par cœur !

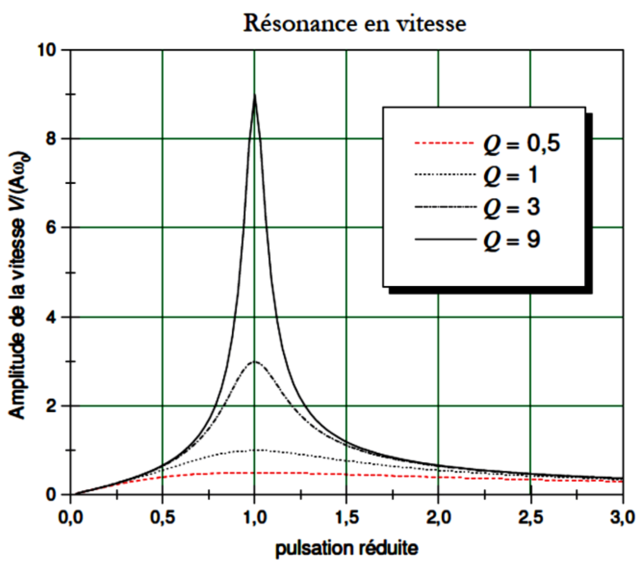
■ Etude de la résonance en vitesse

$$V_M = \left|\underline{V_M}(u)\right| =$$

V_M maximale pour $1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2$ minimale : solution évidente :

La **résonance en vitesse** a toujours lieu pour $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$

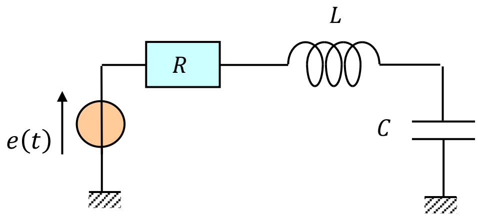




D) Analogie électromécanique

1) Exemple électrique

On s'intéresse au circuit RLC série représenté ci-contre, alimenté par un générateur idéal de tension délivrant une tension $e(t) = E_M \cos(\omega t)$.



2) Analogie, impédance mécanique

L'étude mécanique est transposable à un modèle électrique qui répond à une équation différentielle analogue.

Étude fréquentielle faite en génie électrique, avec introduction de la notion de filtrage.

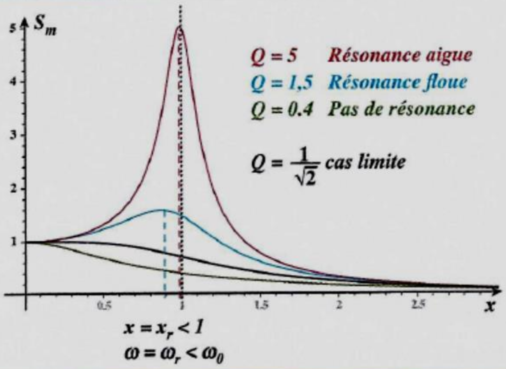
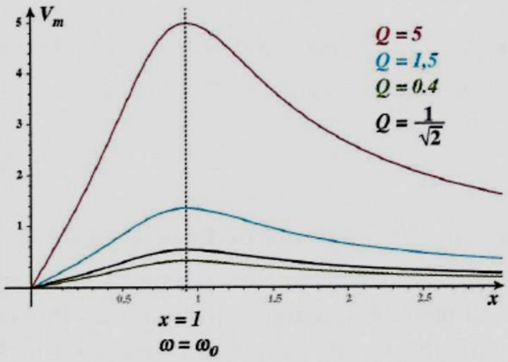
Mécanique	**Electricité**
Elongation *x* (m)	Charge *q* (C)
Vitesse *v* (m.s^{-1})	Intensité *i* (A)
Masse *m* (kg)	Inductance *L* (H)
Raideur *k* (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité *C* (F)
Frottement *h* (N.m^{-1}.s)	Résistance *R* (Ω)
Force *F* (N)	Tension *u* (V)

Impédance complexe d'un dipôle en convention récepteur en électrocinétique : $\underline{\boldsymbol{Z}} =$

Impédances complexes de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{C}$:

$\boldsymbol{R}$ $\quad \underline{Z}_R =$ Type equation here. $\quad \boldsymbol{L}$ $\quad \underline{Z}_L =$ Type equation here. $\quad \boldsymbol{C}$ $\quad \underline{Z}_C =$

Impédance mécanique complexe : $\quad \underline{Z}_{méca} =$

	Réponse en élongation ou charge (ou tension)	Réponse en vitesse ou intensité
Réponse réelle	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\dot{s}(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}} = \dfrac{E_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	$\underline{V} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$
Amplitude de la réponse	$S_m = \lvert\underline{S}\rvert = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$	$V_m = \dfrac{Q\omega_0 E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$
Courbes		
Abscisse du maximum (résonance)	$x = x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$	$x = 1$ et $\omega = \omega_0$
Maximum d'amplitude	Le maximum n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. x_r se rapproche de la fréquence propre quand Q augmente.	Quel que soit Q, le maximum existe et correspond toujours à la fréquence propre.

III. GENERALISATION AUX SIGNAUX PERIODIQUE

A) Analyse de Fourier des signaux périodiques

1) Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

a) Principe

Un signal sinusoïdal constitue un cas très particulier de signal, mais qui est très utilisé en tant qu'outil d'étude. En effet, Joseph Fourier, physicien et mathématicien du début du 19ème siècle, a montré que tout signal périodique peut être étudié à partir d'une superposition de signaux sinusoïdaux.

Toute fonction $s(t)$ périodique de période T, de **fréquence** associée (**fréquence fondamentale**) $f_1 = \frac{1}{T}$ et de **pulsation** associée $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ peut être écrite (décomposée) sous la forme d'une **somme** (appelée **série de Fourier**) **de fonctions sinusoïdales de pulsations** ω_n **multiples de** ω_1 (tout **signal périodique** admet une **décomposition** ou **développement en série de Fourier**) :

$$\boldsymbol{s(t) = V_0 + V_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1) + V_2 cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \cdots + V_n cos(n\omega_1 t + \varphi_n) + \cdots}$$

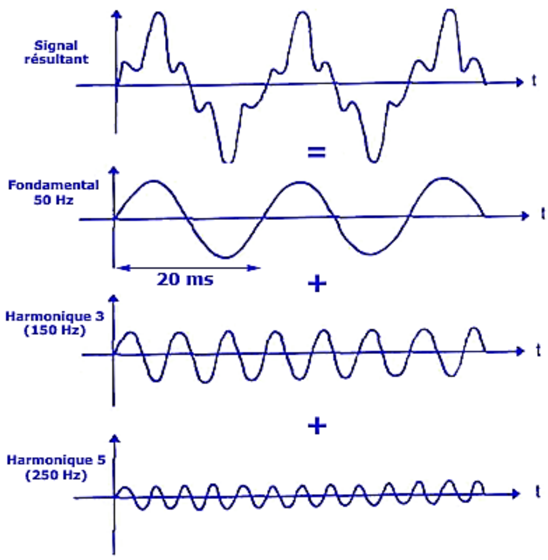
$$\boldsymbol{= V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k cos(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

Tout signal périodique peut donc être vu comme la superposition de signaux sinusoïdaux, avec :

• Terme V_0 : **valeur moyenne du signal** $= < s(t) >$.

• Pulsation ω_1 du signal périodique $s(t)$: pulsation de la 1ère composante sinusoïdale (quand elle existe) = **harmonique de rang 1** ou **terme fondamental** ou **fondamental**. = période la plus grande visible

• Termes de la forme $V_k cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$: **harmoniques de rang k** (ou **d'ordre k**).



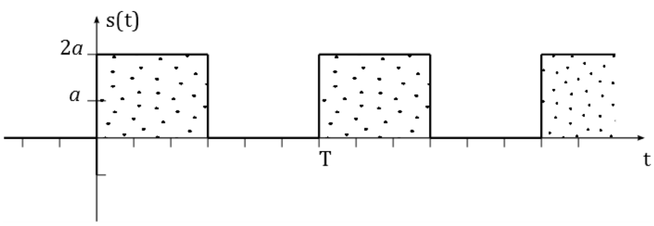
Exemple : le son complexe périodique non sinusoïdal enregistré ci-contre peut être décomposé comme étant la somme de sons sinusoïdaux ou sons purs (respectivement de fréquences f_1, $3f_1$ et $5\,f_1$ dans l'exemple représenté).

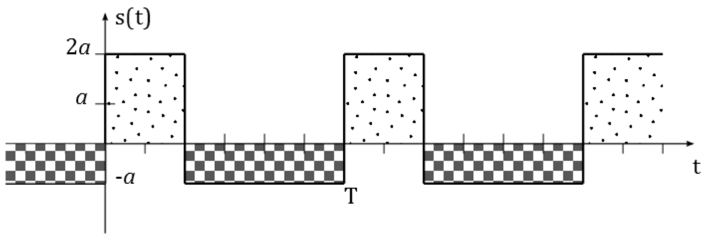
b) Valeur moyenne d'un signal

- **Valeur moyenne** d'un signal $\boldsymbol{X(t)}$ périodique de période T au cours du temps : $\langle \boldsymbol{X(t)} \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \boldsymbol{X(t)dt}$ (moyenne sur une période)
- Pour un signal **alternatif** (donc en particulier un signal **sinusoïdal**) : $\langle \boldsymbol{X(t)} \rangle = \boldsymbol{0}$

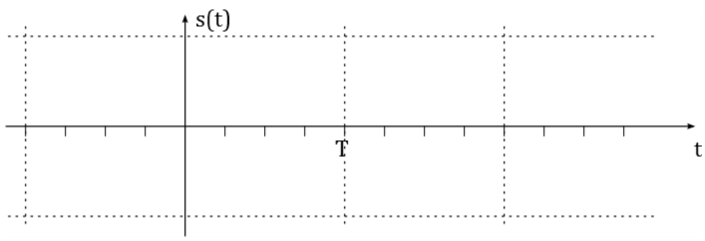
- **Analyse graphique :** $\int_0^T s(t)dt$ représente l'aire algébrique définie par la courbe $s(t)$. Les intervalles sur lesquels $s(t)$ est au-dessus de l'axe des t donneront une contribution positive, tandis que ceux pour lesquels $s(t)$ est en-dessous de l'axe des t donneront une contribution négative.

- **Exemples :** Détermination graphique de la valeur moyenne

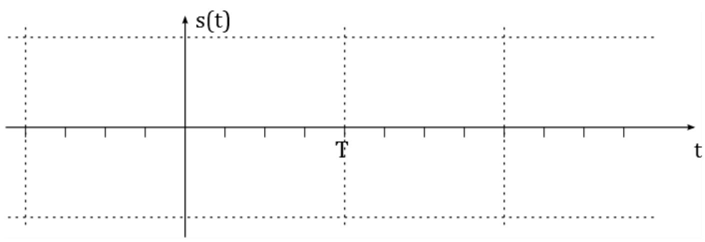




Tracer $s(t) = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ entre $-T$ et $2T$
$a > 0$
Que vaut la valeur moyenne de $s(t)$?



Tracer $s(t) = a\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ entre $-T$ et $2T$
$a > 0$
Que vaut la valeur moyenne de $s(t)$?



- **Résultats classiques à connaître :**

Les valeurs moyennes d'une fonction $\boldsymbol{sin}$ ou $\boldsymbol{cos}$ sont nulles : $\langle \mathbf{sin}(..)\rangle = \langle \mathbf{cos}(..)\rangle = \mathbf{0}$

Les valeurs moyennes d'une fonction $\boldsymbol{sin^2}$ ou $\boldsymbol{cos^2}$ sont égales à $\frac{1}{2}$: $\langle \mathbf{sin^2}(..)\rangle = \langle \mathbf{cos^2}(..)\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

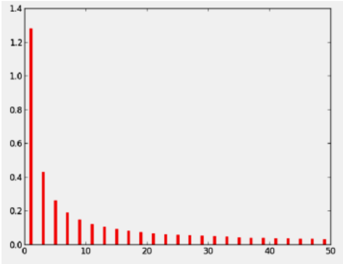
2) Spectre d'une fonction périodique

Un choix convenable des phases φ_k permet d'avoir des coefficients V_k positifs. On peut alors définir le spectre du signal.

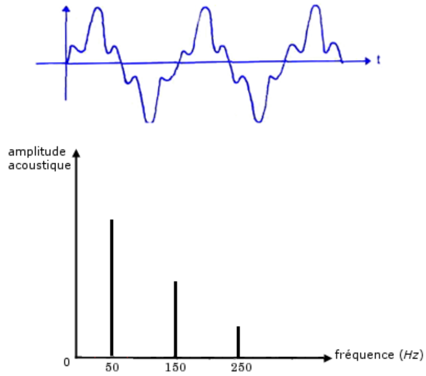
> **Spectre d'un signal périodique :**
>
> Représentation en fonction de la **fréquence** des **amplitudes** des différentes composantes sinusoïdales présentes dans la décomposition de Fourier du signal périodique,
>
> et ce sous forme de segments verticaux.

Exemple 1 : spectre d'un signal rectangle d'amplitude *A* :

On peut montrer que si k est pair, $V_k = 0$, et lorsque k est impair, $V_k = \frac{4A}{k\pi}$.

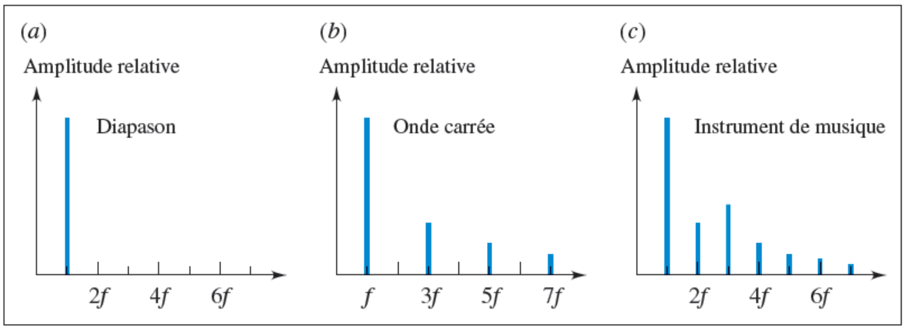


Espace 17

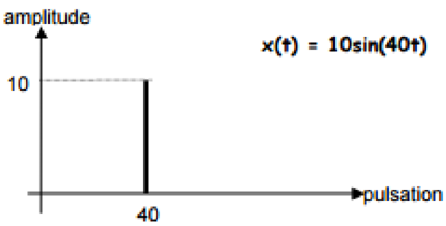


Exemple 2 : Spectre du son étudié dans le paragraphe précédent.

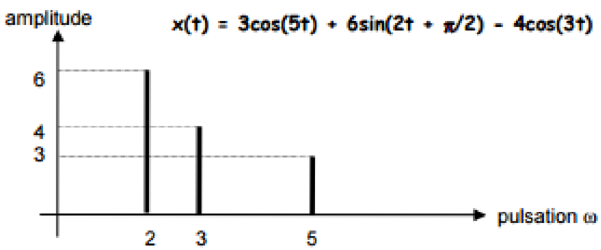
💻 **Simulation :**
http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fourier



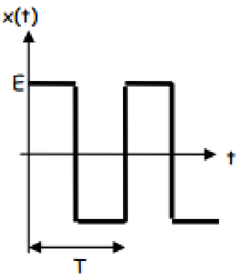
Spectre d'un signal sinusoïdal



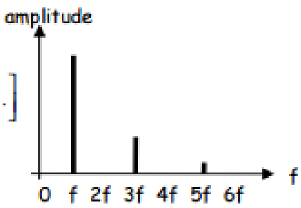
Spectre d'un signal composite

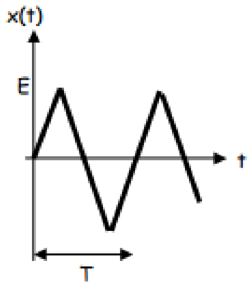


■ Spectres de signaux périodiques

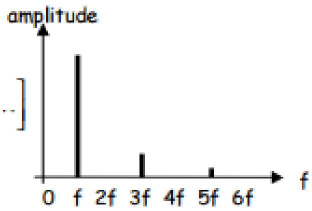


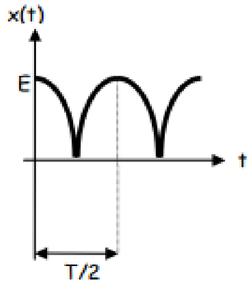
$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right]$$



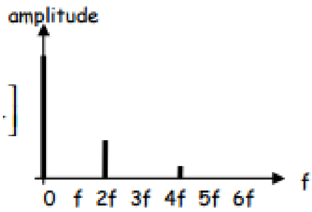


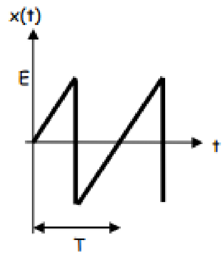
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \ldots\right]$$



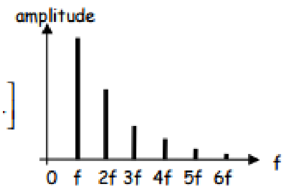


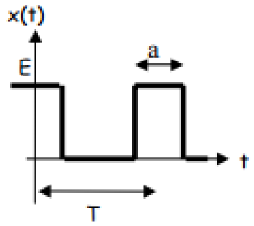
$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1 + \frac{2\cos(2\omega t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega t)}{15} + \ldots\right]$$

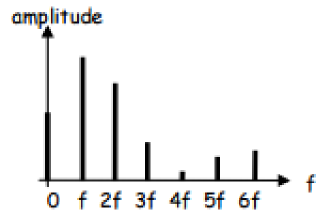




$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \ldots\right]$$





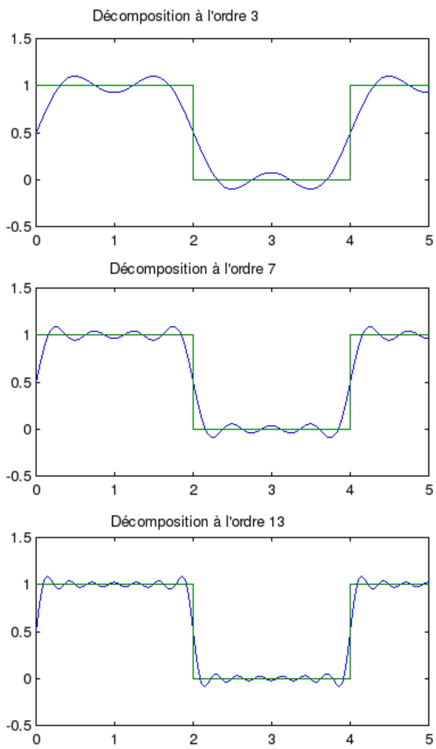


$$x(t) = aE\left[1 + \frac{2\sin(\pi a)}{\pi a}\cos(\omega t) + \ldots + \frac{2\sin(n\pi a)}{n\pi a}\cos(n\omega t) + \ldots\right]$$

3) Synthèse de Fourier

- **Analyse de Fourier :** décomposition d'une fonction périodique en ses composantes harmoniques.
- **Synthèse de Fourier :** inversement, en superposant des fonctions sinusoïdales, il est possible de construire tous types de fonctions périodiques (cf. synthétiseurs).

Exemple : Synthèse d'un signal carré : la décomposition à l'ordre n signifie que le signal représenté a été obtenu via la somme des n premiers termes de la série de Fourier correspondant à la décomposition du signal carré réel représenté.



B) Notion de filtre
1) Généralités
a) Définition

■ Filtre linéaire

Système dont la fonction de transfert dépend, en régime harmonique, de la **fréquence,** et qui permet de **transmettre sélectivement** certaines composantes en fréquence d'un signal (**filtre d'amplitude**), ou d'**introduire des variations sur la phase** de certaines composantes spectrales d'un signal (**filtre de phase**) ; dans tous les cas, il s'agit de modifier **le spectre de Fourrier** d'un signal.

Un filtre parfait doit :

- Être **linéaire** : caractérisé par une équation différentielle linéaire ; par conséquent, il ne peut y avoir apparition de nouvelles fréquences en sortie (pas d'enrichissement du spectre du signal par non linéarité).
- Avoir le **même retard à la transmission** pour **toutes les fréquences.**
- **Transmettre sans déformer** les composantes sinusoïdales d'un signal dans certains domaines de fréquence qui composent alors sa **bande passante (B.P.).**
- **Eliminer totalement** les fréquences hors de sa bande passante qui constituent alors sa **bande coupée (B.C.)**.

Ainsi, on aura $G(\omega) = 1$ si $\omega \in$ B.P.
$G(\omega) = 0$ si $\omega \notin$ B.P.

En réalité, un filtre parfait est irréalisable; il s'agira d'approximations de ce modèle.

b) Les principaux types de filtres

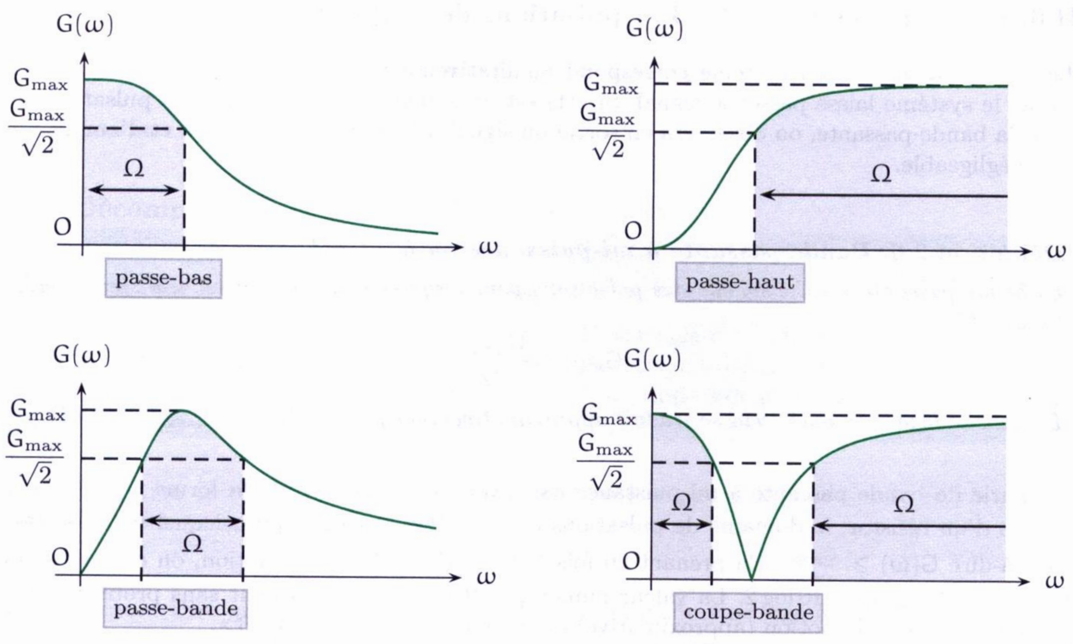


FIG. 2.3. Gabarits des filtres classiques. Les diagrammes représentés ne sont pas en échelle logarithmique, d'où l'absence d'asymptotes.

2) Principe du filtrage linéaire d'un signal périodique
a) Principe de superposition

Le filtre étant linéaire, on applique le **principe de superposition** :

Soient deux signaux d'entrée $e_1(t)$ et $e_2(t)$ ayant respectivement pour réponse $s_1(t)$ et $s_2(t)$, le signal d'**entrée** $\boldsymbol{e(t) = e_1(t) + e_2(t)}$ aura pour **réponse** $\boldsymbol{s(t) = s_1(t) + s_2(t)}$

Chaque harmonique du signal d'entrée est traitée séparément pas le filtre, et le signal de sortie du filtre est la somme des différentes composantes filtrées.

On considère le signal périodique $e(t)$ imposé à l'entrée d'un filtre linéaire, qui se décompose en série de Fourier.

En notant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période du signal, on peut écrire $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = \langle e(t) \rangle + E_1 cos(\omega t + \varphi_1) + E_2 cos(2\omega t + \varphi_2) + \cdots + E_n cos(n\omega t + \varphi_n) + \cdots = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Soit $s_k(t) = S_k cos(k\omega t + \varphi'_k)$ la réponse au signale d'entrée $e_k(t) = E_k cos(k\omega t + \varphi_k)$

Signal de sortie $s(t)$: $s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k cos(k\omega t + \varphi'_k)$.

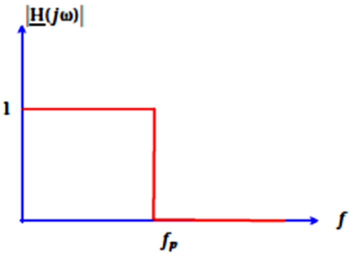
b) Analyse spectrale

On peut comparer les spectres de l'excitation (entrée) et de l'élongation (sortie) pour comprendre la nature du filtre.

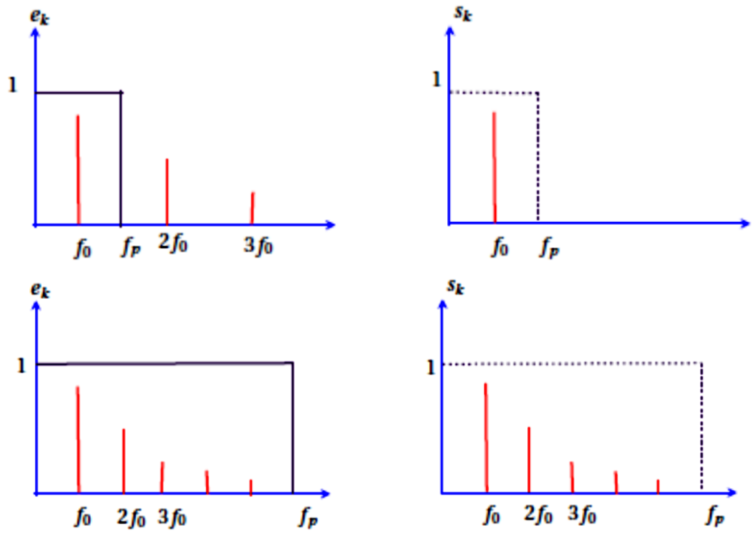
C) Notion de bande passante

- **Filtrage passe-bas**

Courbe G idéale

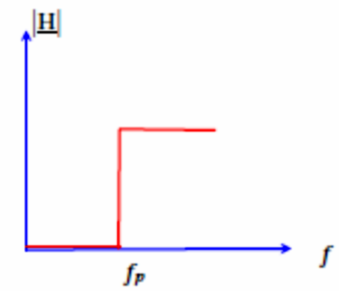


Cas limites :

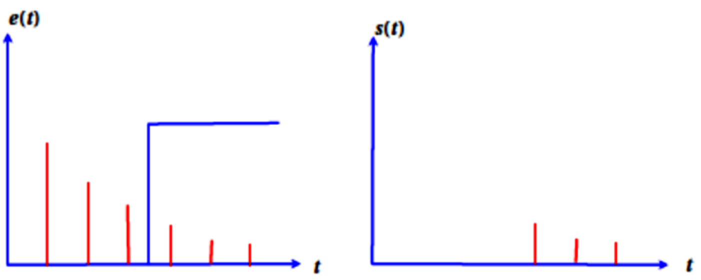


- **Filtrage passe-haut**

Courbe G idéale

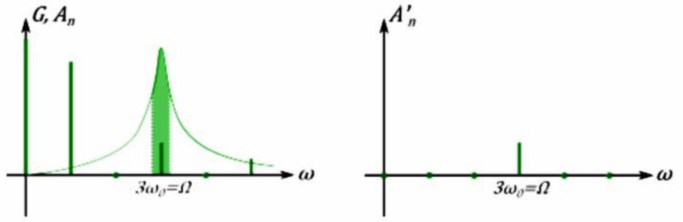


Exemple



■ Filtrage passe-bande

Filtre très sélectif



(a) Superposition spectre - gain (b) Allure du spectre de sortie

FIGURE 16 – $Q >> 1$: seul l'harmonique correspondant à la fréquence centrale du filtre est restitué correctement.

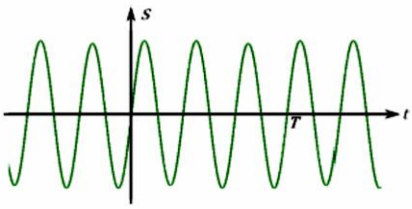
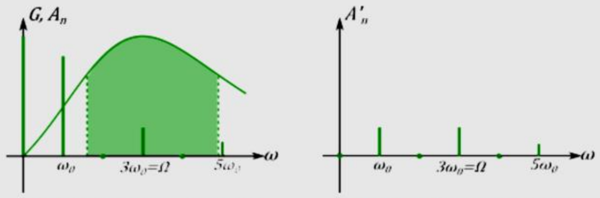


FIGURE 17 – Signal obtenu en sortie d'un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 50$. Le filtrage isole bien l'harmonique de pulsation $3\omega_0 = \Omega$.

Filtre très peu sélectif



(a) Superposition spectre - gain (b) Allure du spectre de sortie

FIGURE 18 – Pour un filtre peu sélectif, les harmoniques ω_0 et $5\omega_0$ ne sont pas complètement éliminés.

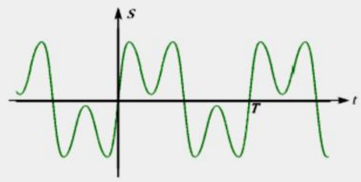


FIGURE 19 – Signal obtenu en sortie d'un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 1$. Le filtrage n'est pas assez sélectif : le signal de sortie n'est pas une sinusoïde.