# M5 OSCILLATIONS FORCEES

## Travaux Dirigés

### Exercice 1 : Etude fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur forcé

Considérons un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

1) En exploitant cette équation différentielle, établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_M$ de l'élongation du ressort en fonction de la pulsation puis de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.
2) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.
3) Effectuer l'étude asymptotique de cette amplitude à basse et haute fréquence.
4) Exprimer l'amplitude pour $\omega = \omega_0$
5) Etudier la résonance en élongation du système : condition d'existence et pulsation de résonance.

### Exercice 2 : Résonance en vitesse

On considère la suite de l'étude de l'exercice 2, avec un système subissant des oscillations forcées vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Et une amplitude complexe telle que $\underline{X}_M = \frac{\omega_0^2\,X_0}{\left(-u^2\omega_0^2 + i\omega_0^2\frac{u}{Q} + \omega_0^2\right)}$ ou $\underline{X}_M(u) = \frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}}$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1) Etablir l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse, puis de l'amplitude réelle de la vitesse.
2) Etudier la résonance en vitesse : condition, pulsation de résonance, amplitude à la résonance.

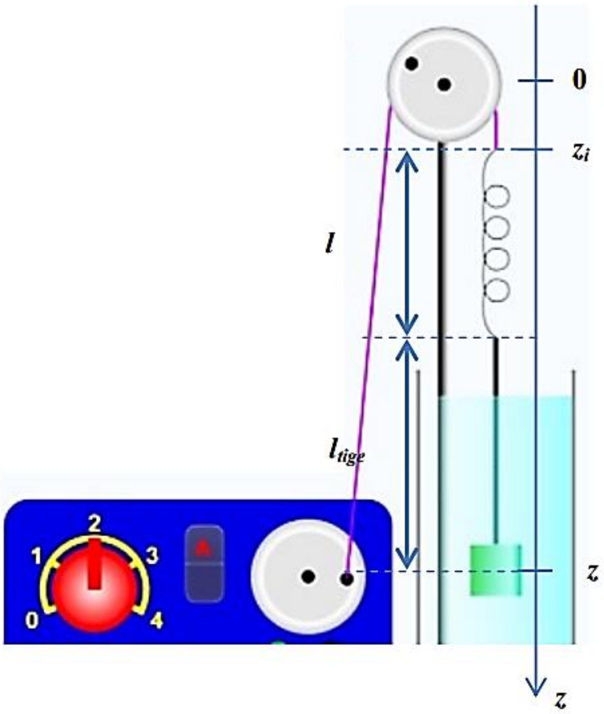
### Exercice 3 : Oscillations forcées d'un système masse-ressort horizontal amorti

On considère une bille $M$, quasi ponctuelle, de masse $m$ accrochée à un ressort horizontal de longueur à vide $l_0$ et de constante de raideur $k$, se déplaçant sans frottements solides sur un axe horizontal $(Ox)$. L'autre extrémité du ressort est fixe ; elle est accrochée en un point O constituant l'origine de l'axe horizontal $(Ox)$.

Le point M est de plus soumis à une force excitatrice $\vec{F_e} = F_m\cos(\omega t)\,\vec{e_x}$ ainsi qu'à des frottements fluides $\vec{f} = -h\vec{v}$.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x$ du point M.
2) Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation.
3) En déduire l'expression de l'amplitude réelle de l'élongation.

**Exercice 4 : Oscillations forcées d'un système masse-ressort vertical amorti**




L'excitation est réalisée par un moteur à vitesse variable, relié à une excentrique.

La masse $m$ sera considérée comme ponctuelle, le ressort possède une raideur $k$, la force de frottement s'écrit : $\vec{f} = -h\vec{v}$.

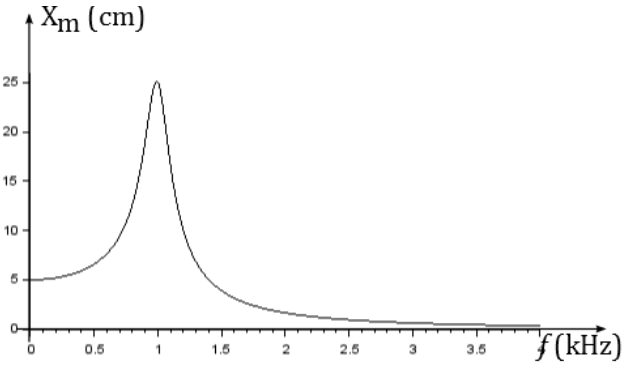
En l'absence d'excitation, la position $z_i$ s'écrit : $z_i = Z_0$.

En présence d'excitation, la position $z_i$ s'écrit : $z_i = Z_0 + A\cos(\omega t)$.

1) Ecrire la relation entre $z$, $z_i$, $l$ et $l_{tige}$.
2) A partir d'un raisonnement énergétique, montrer que la position d'équilibre $z_{éq}$ s'écrit :
$$z_{éq} = \frac{mg}{k} + Z_0 + l_{tige} + l_0$$
3) En l'absence d'excitation, et à partir d'un raisonnement énergétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 z_{éq}$$
Exprimer $\omega_0$ et $Q$ en fonction de $h$, $k$ et $m$.
4) En régime forcé, on pose : $Z = z - z_{éq}$ ; $\underline{Z} = Z_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{Z_m} e^{j\omega t}$.
Montrer que l'amplitude réelle du mouvement $Z_m$ peut s'écrire :
$$Z_m = \frac{A{\omega_0}^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$
avec : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation réduite.
5) Déterminer la condition sur $Q$ pour obtenir un phénomène de résonance d'amplitude.

## Exercice 5 : Courbe de résonance en élongation

Un oscillateur amorti, excité sinusoïdalement avec une fréquence $f$ variable présente une résonance d'élongation très visible sur le graphe ci-contre.



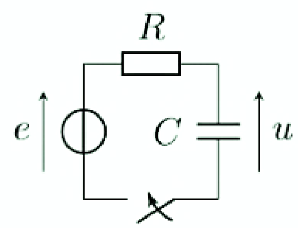

Déterminer (sans calculs lourds) les valeurs de la fréquence propre $f_0$ et du facteur de qualité $Q$ pour l'oscillateur étudié.

Cet oscillateur amorti correspond à un système masse ressort horizontal soumis à des frottements fluides $\vec{f} = -h\vec{v}$. Pour une masse $m = 100\ g$, déterminer la constante de raideur $k$ du ressort et le coefficient de frottement $h$.

## Exercice 6 : Circuit RC

L'équation différentielle vérifiée par *u* s'écrit, pout *t* > 0 :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e(t) \text{ avec } \quad e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

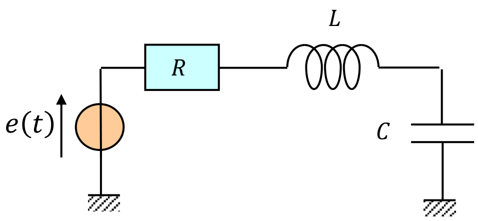



On cherche une solution particulière sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi')$.

1. Ecrire cette équation différentielle en faisant apparaître les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{E}$.
2. Retrouver le résultat précédent à partir de la loi des mailles et des expressions des impédances complexes des dipôles.
3. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $\underline{U}$.
4. En déduire l'expression de l'amplitude réelle $U_m$ et du déphasage $\varphi' - \varphi$.

## Exercice 7 : Résonance en charge du RLC série

On s'intéresse au circuit RLC série représenté ci-contre, alimenté par un générateur idéal de tension délivrant une tension $e(t) = E_M \cos(\omega t)$.




1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur.

2) La mettre sous forme canonique.

3) Faire l'analogie avec le système oscillateur mécanique étudié et introduire la notion d'impédance mécanique.

4) Etudier la résonance en intensité : expression de l'amplitude complexe associée à l'intensité, fréquence de résonance, amplitude à la résonance.

5) On définit les fréquences de coupures comme étant les fréquences telles que l'amplitude aux fréquences de coupure soit égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$. La largeur de la bande passante correspond alors à l'intervalle de fréquences compris entre les fréquences de coupure. Etablir les caractéristiques de la bande passante associée à la résonance en intensité du RLC série.

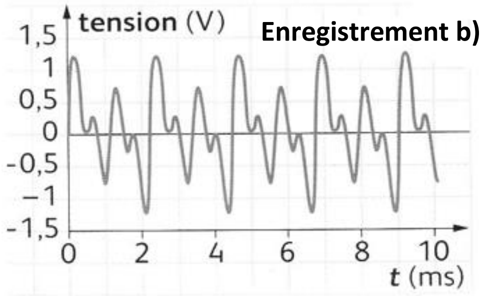
## Exercice 8 : Enregistrement de sons

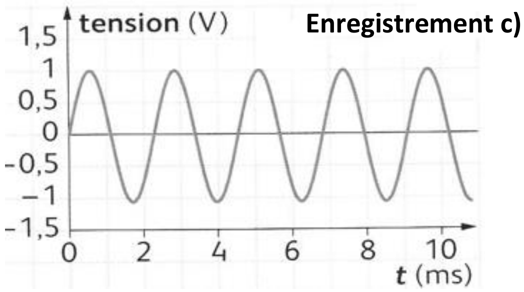
Pour accorder son instrument, un guitariste utilise un diapason qui émet un son pur. Un dispositif d'acquisition permet d'obtenir les enregistrements b) et c) ci-dessous. L'un de ces enregistrements correspond au son émis par le diapason seul et l'autre au son émis par la guitare seule.

**Document :**

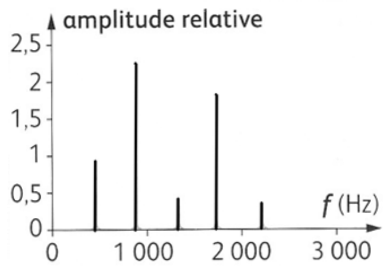
L'amplitude d'un signal produit par un instrument de musique va définir l'intensité du son (fort ou faible, notion de décibels). Chaque son peut être caractérisé par son spectre. La note jouée par un instrument de musique est alors définie par la fréquence du fondamental associé. Pour une note donnée, soit pour une fréquence de fondamental donnée, la richesse du spectre (amplitudes relatives des harmoniques de rang n) va définir le timbre de l'instrument (la même note jouée par un piano, un violon ou une flûte, à la même intensité, ne sera pas perçue de la même manière). Un diapason a pour caractéristique de produire un son dit pur, associé à un signal sinusoïdal.

| Note | $Do_3$ | $Ré_3$ | $Mi_3$ | $Fa_3$ | $Sol_3$ | $La_3$ | $Si_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence (Hz) | 262 | 294 | 330 | 349 | 392 | 440 | 494 |




L'analyse spectrale du son de la guitare fournit le spectre ci-contre.




a) Attribuer à chaque instrument sa courbe b) ou c) en justifiant votre réponse, et en indiquant si le son produit est un son pur ou un son complexe.

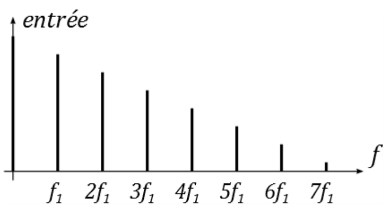
b) Représenter le spectre du son émis par le diapason.

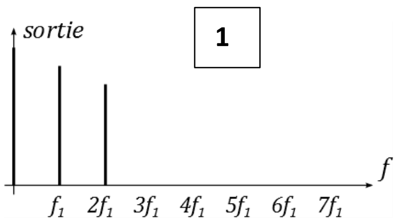
c) À quoi correspondent les différents pics du spectre du son de la guitare ?

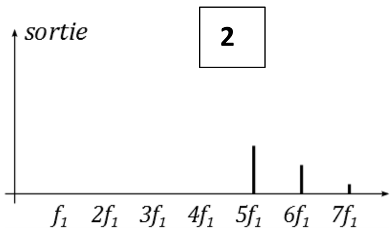
d) Quelle note la guitare joue-t-elle ? est-elle bien accordée avec le diapason ?

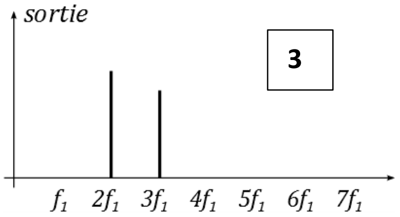
## Exercice 9 : Nature d'un filtre

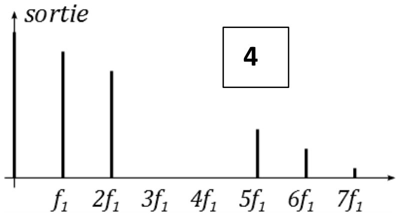
On donne le spectre d'un signal en entrée puis en sortie de différents filtres ; en déduire la nature de chacun de ces filtres ainsi que les caractéristiques pouvant être précisées.



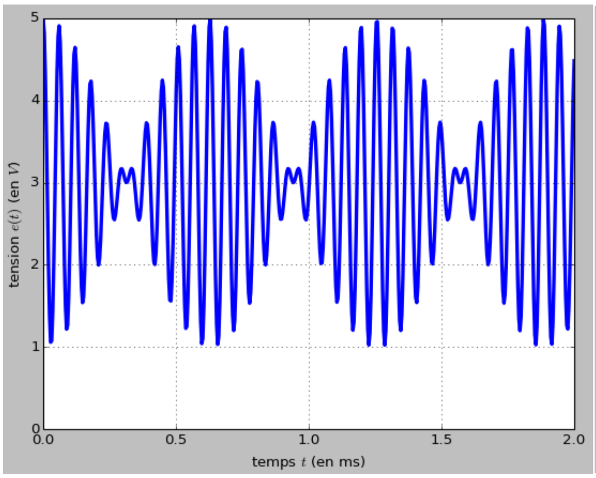



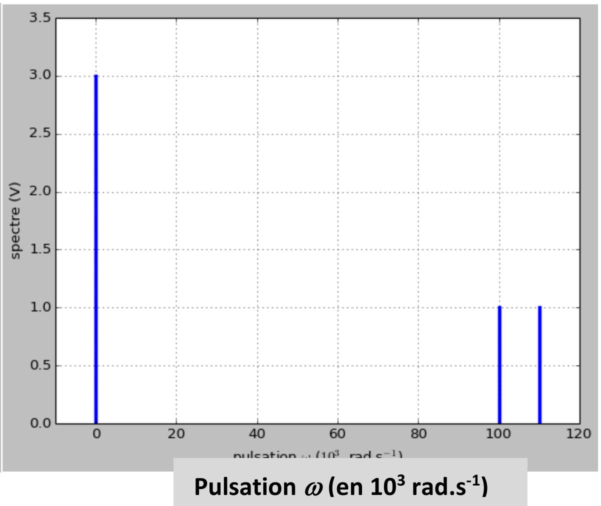



## <u>Exercice 10 : Filtrage d'un signal</u>

On considère le signal électrique dont la tension et le spectre (décomposition en série de Fourier) sont représentés ci-dessous.



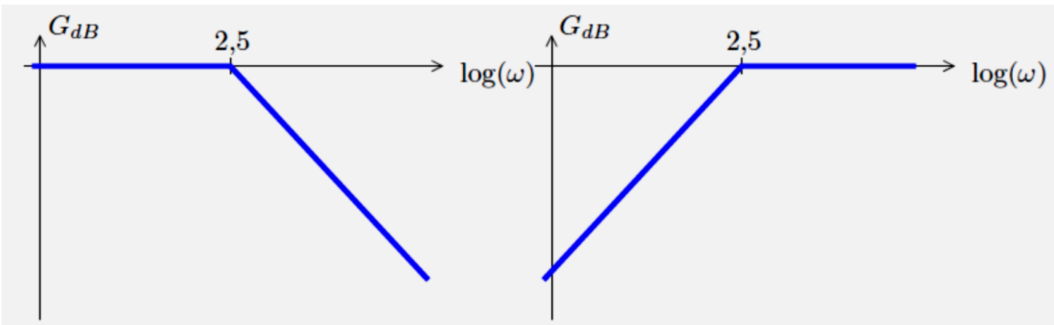




Tracer l'allure de la tension en sortie de chacun des filtres dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.

Le gain en décibels est défini comme étant $G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \frac{S}{E}$ avec $E$ amplitude du signal d'entrée et $S$ amplitude du signal de sortie.

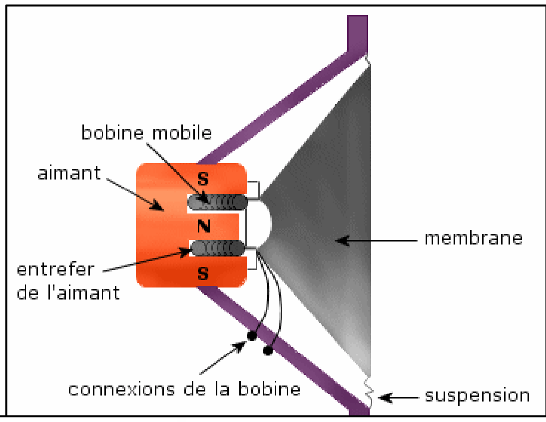
**Annexe :** Rapports de valeurs de grandeurs de champ et décibels

| Rapport | 1 | 1,12 | 1,26 | 1,4 | 1,6 | $\approx 1{,}8$ | 2 | $\approx 2{,}2$ | 2,5 | 2,8 | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| équivalent | | | $\approx 5/4$ | $\sqrt{2}$ | $16/9$ | | | $\sqrt{5}$ | $5/2$ | $2\sqrt{2}$ | $\sqrt{10}$ |
| dB | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |



## Exercice 11 : Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse $m$, se déplaçant horizontalement sans frottement solide le long de l'axe $(Ox)$ d'origine O le point d'accroche du ressort.




Cette masse $m$, assimilée à un point matériel $M(m)$, est reliée à un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de raideur $k$ et à un amortisseur fluide de constante $h$ générant une force $\vec{f} = -h\vec{v}$; elle est par ailleurs soumise à une force de Laplace $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, donnée par :

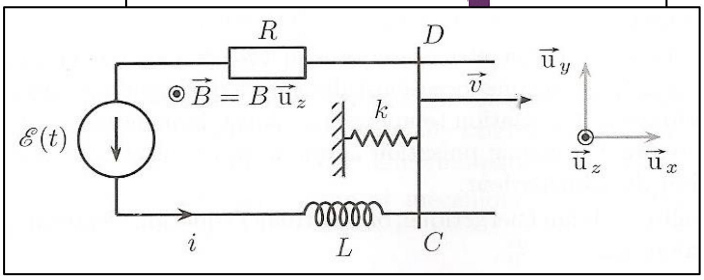
$$\vec{F}(t) = K\, i(t)\, \vec{u}_x, \text{ avec } K \text{ une constante.}$$

(Cette force de Laplace est une force exercée sur un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, ici créé par l'aimant.)

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le courant $i(t)$ est supposé sinusoïdal :

$$i(t) = I_m\, cos(\omega t)$$




**Modèle électro-mécanique**

*Données :*

$m = 10\ g$ ; $k = 15\ kN/m$ ; $K = 200\ N/A$ ; $I_m = 1\ A$.

**1)** Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse $m$ et la mettre sous sa forme canonique.

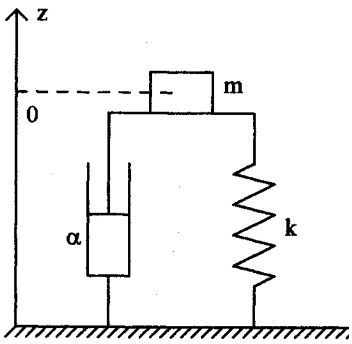
**2)** On veut $Q = 1/\sqrt{2}$. Calculer la valeur du coefficient $h$.

**3)** Déterminer l'amplitude du mouvement du haut-parleur ainsi que sa phase à l'origine, puis donner l'expression de la réponse forcée $x(t)$.

A.N. $\omega = 6280\ rad/s$.

**4)** Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \to X_m(\omega)$.

## Exercice 12 : Vibrations d'un moteur




Lorsqu'un moteur fonctionne, l'existence d'un balourd (déséquilibre de répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation) provoque des vibrations du châssis ; il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur est assimilé à un point matériel de masse $m$.

La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de raideur $k$, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$, où $\alpha$ est une constante positive.

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer par une étude vectorielle la longueur $\ell_e$ du ressort. La position du moteur dans ce cas est alors prise comme origine de l'axe $Oz$.
2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le laisse évoluer librement.

   ***2.1.*** Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

**2.2.** On pose : $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on suppose que $\lambda < \omega_0$.

Donner la forme générale de la solution $z(t)$ en fonction des paramètres $\lambda$ et $\omega_0$.

Comment appelle-t-on ce type de régime ?

**2.3.** Écrire l'énergie mécanique $E_M$ du système en fonction de $z$ et $\dot{z}$. Le système est-il conservatif ? Que vaut $\frac{dE_M}{dt}$ ? Retrouver ainsi l'équation du mouvement obtenu en ***2.1.***

**3.** Le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme :
$\vec{F} = F_0 cos(\omega t)\vec{u}_z$.

**3.1.** Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

**3.2.** En régime sinusoïdal établi, on recherche des solutions de la forme :

$$z(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{dz}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \psi).$$

Déterminer l'expression de la grandeur complexe $\underline{V} = V_0 e^{j\Psi}$.

**3.3.** Exprimer $V_0$ en fonction des paramètres $\lambda$, $\omega_0$ et $\frac{F_0}{m}$. Donner l'allure de $V_0(\omega)$.

**3.4.** Le moteur, de masse $m = 10\ kg$, tourne à une pulsation $\omega = 628\ rad.s^{-1}$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1 = 4.10^6\ N.m^{-1}$ et $k_2 = 1.10^6\ N.m^{-1}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

**<u>Exercice 13 : Accéléromètre d'un stabilisateur d'images</u>**

Les appareils photo reflex numériques, même ceux d'entrée de gamme, sont aujourd'hui équipés d'accéléromètres pour la stabilisation d'image. Cela permet, en particulier sur les longues focales, de stabiliser la visée. Il est alors plus facile de faire le point sur un sujet très lointain et il est plus aisé de soigner son cadrage, les tremblements du photographe étant amortis.

On se propose, dans cette partie, d'étudier le fonctionnement d'un accéléromètre à détection capacitive, ce système étant le plus répandu actuellement. Son principe est décrit ci-après.

Une poutre suspendue appelée « masse sismique » constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'autre armature est solidaire de l'appareil photo dont on veut mesurer l'accélération (voir figure 1).

Les variations de capacité liées au déplacement de la masse sismique permettent de suivre son mouvement.

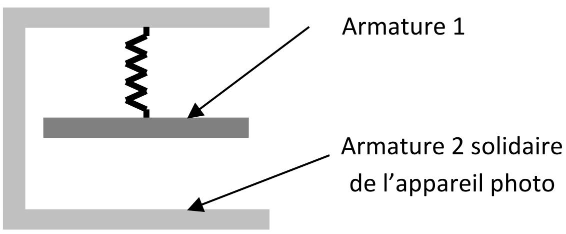



**Figure 1**

On modélise la structure mécanique étudiée par une masse ponctuelle M de masse $m$, suspendue à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$, dont l'autre extrémité est fixée en O au bâti solidaire de l'appareil photo (voir figure 2).

Les amortissements sont modélisés par une force de frottement fluide de coefficient α du type :

$\vec{f} = -\alpha\vec{v}(M/R_{app})$ où $\vec{v}(M/R_{app})$ représente la vitesse du point M dans le référentiel de l'appareil photo.

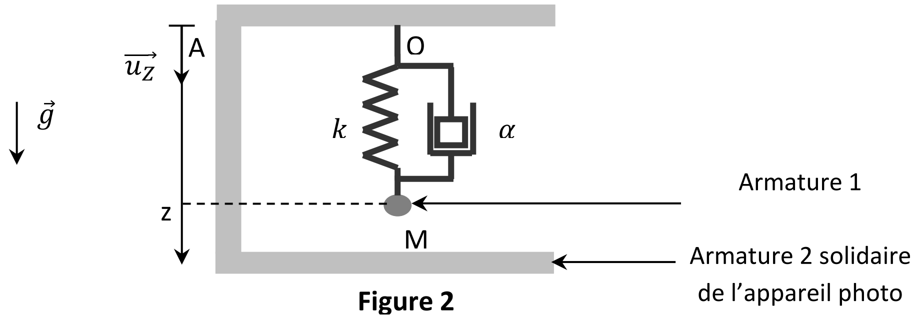



**Figure 2**

On s'intéresse à la détermination de l'amplitude $Z_O$ de la vibration engendrée par le tremblement du photographe. On considère pour cela que le point O oscille verticalement à la pulsation $\omega$ avec une amplitude $Z_O$ dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Sa position est repérée par sa cote $z_0(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

La position de la masse M est repérée **dans le référentiel de l'appareil photo** par sa cote $z(t) = \overline{OM}$.

On note $z_{eq}$ la position d'équilibre de la masse M en l'absence de vibration, et $Z = z - z_{eq}$ la position de la masse M par rapport à sa position d'équilibre.

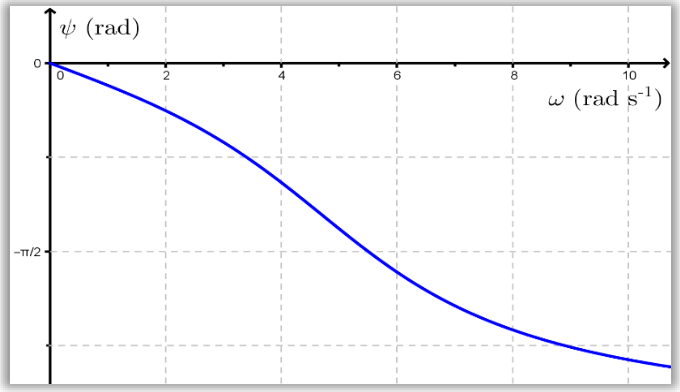
1. L'accélération intervenant dans le principe fondamental de la dynamique est celle du point M dans le référentiel terrestre soit $\frac{d^2\overline{AM}}{dt^2}$. Justifier brièvement qu'on a alors $a(M)_{/R_T} = \ddot{z} + \ddot{z}_0$, tandis que la force de frottement s'écrit : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\overrightarrow{u_z}$.
2. Dans le référentiel terrestre, exprimer la position de M en fonction de $z(t)$ et $z_0(t)$ puis établir l'équation différentielle du mouvement de la masse M dans le référentiel terrestre sous la forme :
$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dZ}{dt} + {\omega_0}^2 Z = \omega^2 Z_0\, cos(\omega t)$$
Nommer $\omega_0$ et $Q$. Préciser leurs dimensions et leurs expressions en fonction de $m, \alpha$ et $k$.
3. En utilisant la notation complexe, établir l'expression de l'amplitude $Z_M$ de $Z(t)$ en fonction de $Z_O$, $Q$ et de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.
4. Montrer que la courbe $Z_M(x)$ passe par un extremum dont on admettra qu'il s'agit d'un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et préciser l'expression $x_r$ de $x$ lorsque $Z_M$ passe par ce maximum. Vérifier que $x_r > 1$.
5. Etudier les équivalents basse et haute fréquences de $Z_M(x)$ puis tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $Z_M(x)$ pour $Q_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q_3 > Q_2$ en portant une attention particulière au positionnement des maxima.
6. Comment faut-il choisir le facteur de qualité du système et sa pulsation propre pour qu'il fonctionne sur une plage de fréquences de tremblements la plus large possible ?

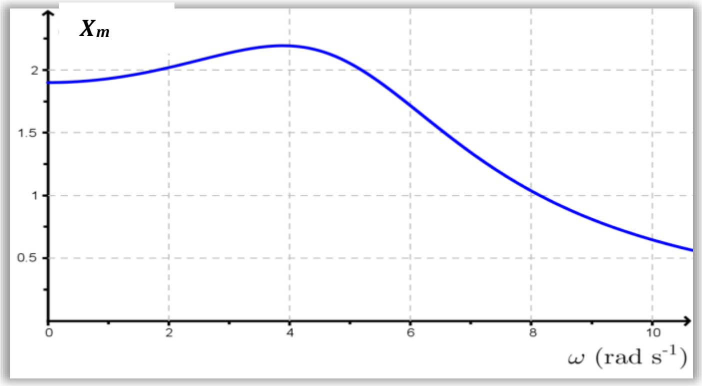
## Exercice 14 : Détermination des paramètres d'un oscillateur

L'équation différentielle d'un oscillateur de pulsation propre $\omega_0$ et de facteur de qualité $Q$ soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation $\omega$ s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\,cos(\omega t)$$

1) Retrouver l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation de cet oscillateur soumis à une excitation sinusoïdale.
2) Que vaut, en fonction de l'amplitude complexe, l'amplitude réelle $\boldsymbol{X_m}$ de l'oscillateur ?
3) Que vaut, en fonction de l'amplitude complexe, le déphasage $\boldsymbol{\psi}$ de la réponse en élongation par rapport à l'excitation ?




4) Les graphes donnant $\boldsymbol{X_m}$ et $\boldsymbol{\psi}$ en fonction de ω sont donnés ci-dessous.

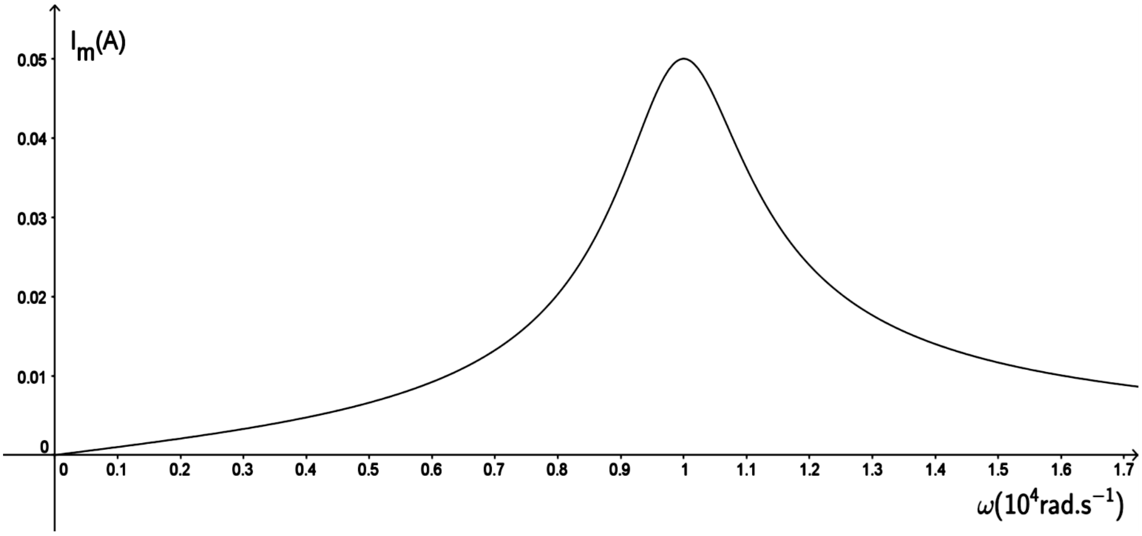
Déterminer les valeurs de $\omega_0$ et $Q$ pour l'oscillateur étudié.

## Exercice 15 : Exploitation d'une courbe de résonance

Un circuit RLC série est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude 5V. La figure ci-dessous est la courbe de résonance en intensité obtenue expérimentalement.

1) Etablir l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité, puis celle de l'amplitude réelle.
2) Etablir l'expression de la fréquence de résonance et de l'amplitude à la résonance.

On définit les pulsations de coupure $\omega_c$ telles que $I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$, avec $I_{m,max}$ amplitude à la résonance, et la bande passante $\Delta\omega_c$ telle que $\Delta\omega_c = \omega_{c,2} - \omega_{c,1}$. L'étude théorique de la résonance en intensité du RLC série montre que $\Delta\omega_c = \frac{\omega_O}{Q}$, avec $Q$ facteur de qualité du circuit et $\omega_O$ pulsation propre.

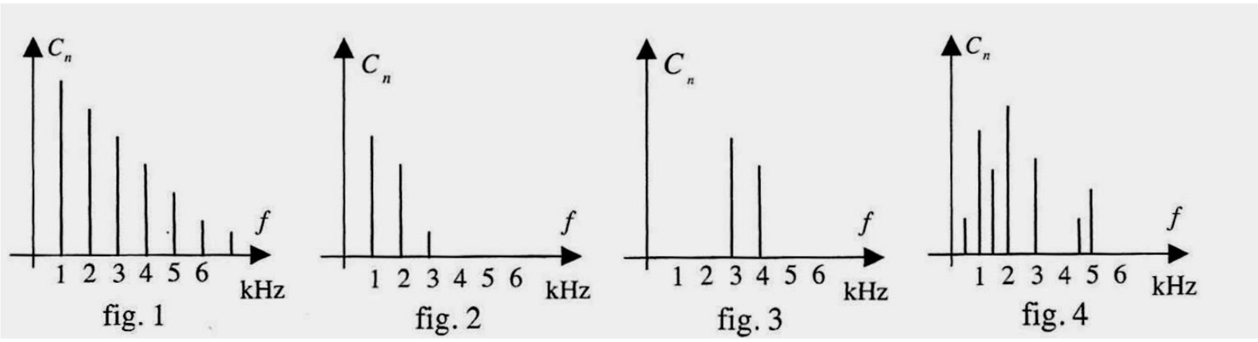



3) En exploitant le graphe ci-dessus, déterminer les valeurs de la résistance, de l'inductance et de la capacité.

**Exercice 16 : Analyse de spectres**

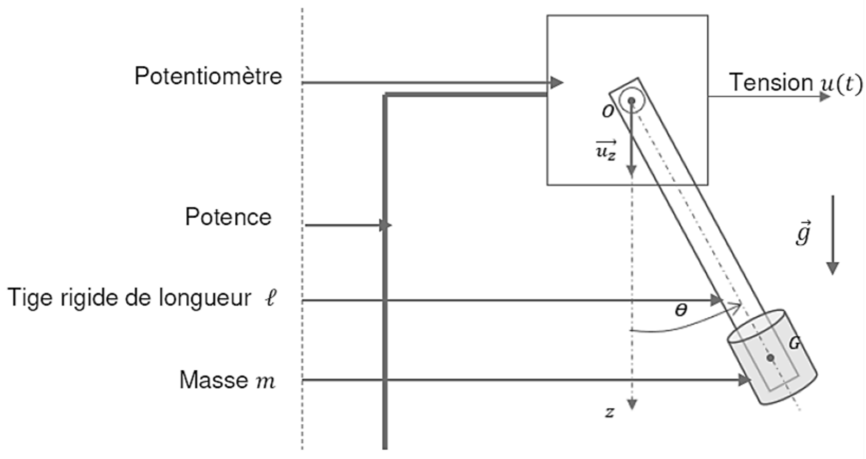
Le même signal $s(t)$ périodique, dont le spectre des fréquences est donné figure 1, est envoyé à l'entrée de 3 filtres différents. On procède à l'analyse spectrale du signal de sortie pour chacun.

Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on en déduire ?




**Exercice 17 : Etude du spectre associé aux oscillations d'un pendule – ATS 2020**

On considère le dispositif ci-contre permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur $\ell$ et d'une masse $m$ fixée à son extrémité., oscillant autour du point $O$. La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant $Oz$. Un potentiomètre alimenté permet de suivre la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec $k$ constante.

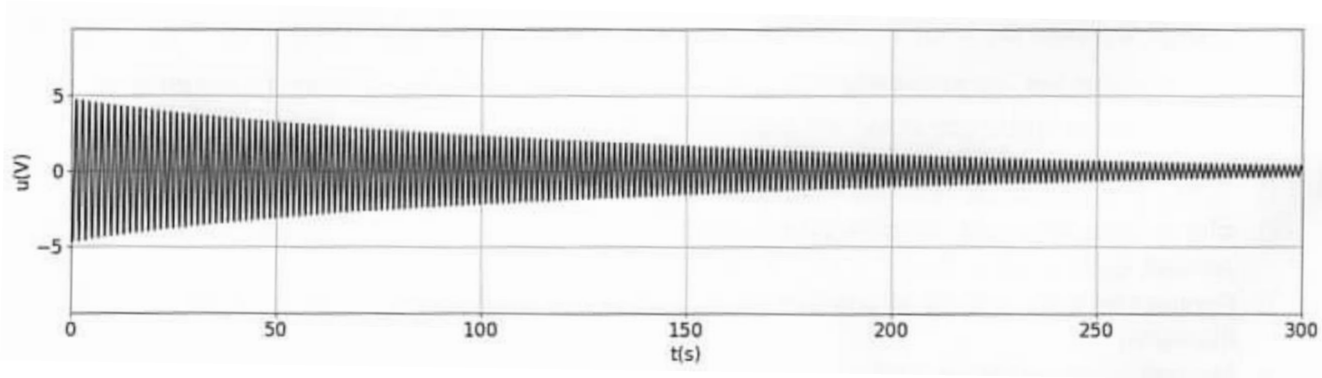



Une fois lancé, le pendule oscille avec une fréquence d'oscillation telle que :

$$\theta(t) \approx \theta_0(\sin(\omega_0' t) + \frac{\theta_0^2}{192}\sin(3\omega_0' t))$$

Avec $$T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0'} \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

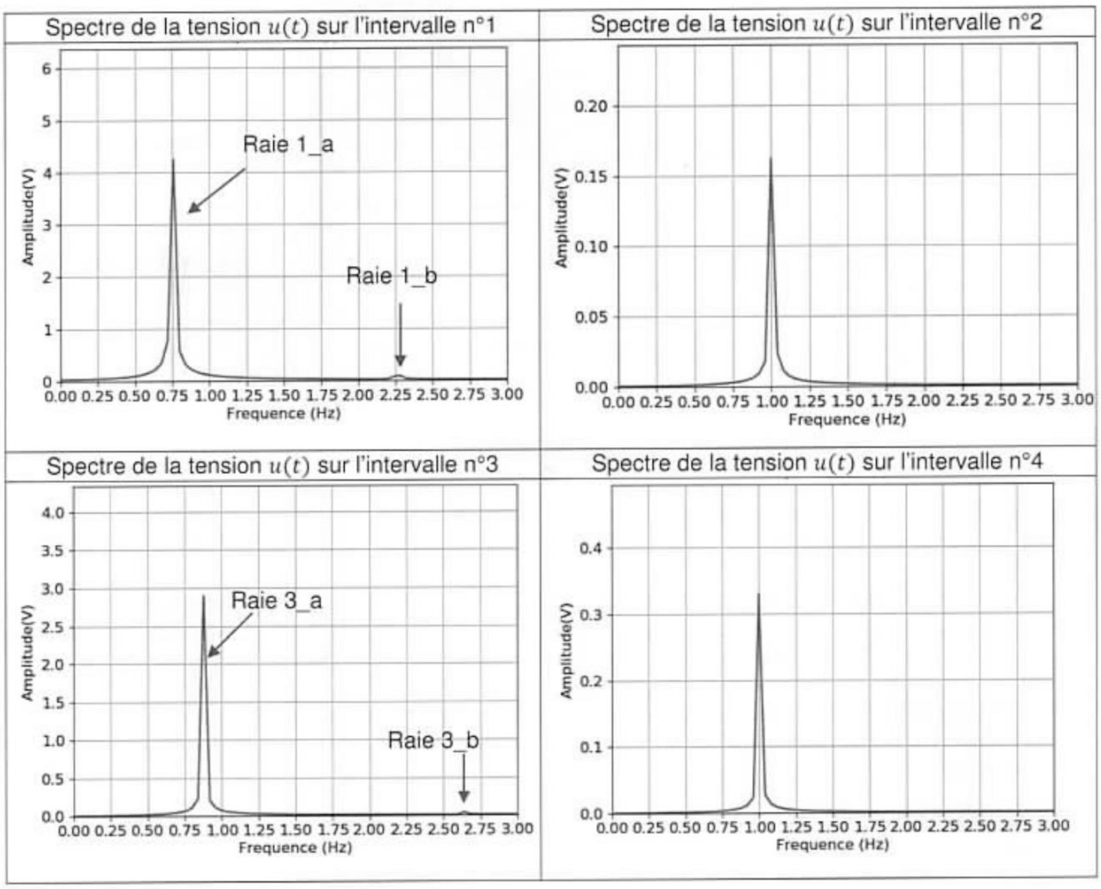
On donne ci-dessous le relevé expérimental de la tension $u(t)$.




Quelle doit être la fréquence $\boldsymbol{f_e}$ d'échantillonnage permettant une acquisition de 600 000 échantillons de la tension $\boldsymbol{u(t)}$ pendant 300 s ?

L'étude des oscillations pendant 300 s met logiquement en évidence l'influence des frottements. Cependant, en étudiant les oscillations sur des intervalles de temps plus court de 25 s, on peut en première approximation encore négliger l'effet des frottements.

On donne ci-dessous les spectres obtenus pour 4 intervalles distincts de 25 s chacun, appelés intervalles n°1, n°2, n°3 et n°4 :



1) Quel instrument de mesure peut-on utiliser afin d'obtenir le spectre de la tension $u(t)$ ?

2) Dans quel ordre peut-on classer les intervalles associés aux différents spectres ?

3) Sur quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des oscillations harmoniques du pendule est-il observable ? Justifier.

4) Sur quel(s) intervalle(s) les effets non linéaires des oscillations du pendule sont-ils observables ? Justifier en repérant ces effets non linéaires.

5) Donner la valeur de la fréquence propre $f_0$ du pendule.

6) Justifier la valeur de la fréquence associée à la raie 1_b.