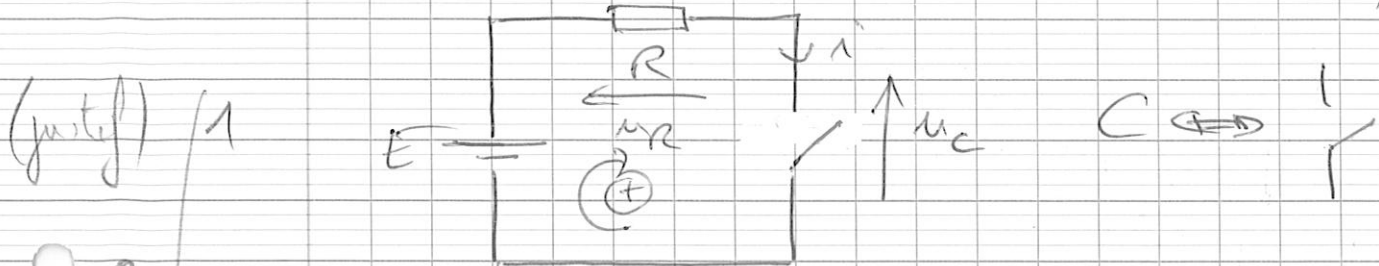


Problème N°1 : Circuits RC

17

A) 1) Modèle équivalent du circuit en régime permanent (à l'issue du régime transitoire) :



3) 1
1

$i = 0$ (interrupteur ouvert)
 $u_C = E$ (car $i = 0 \Rightarrow u_R = 0$)

2) 1 2) a) loi des mailles : -
 $E - Ri - u_C = 0$
 avec $i = C \frac{du_C}{dt}$
 $E - RC \frac{du_C}{dt} - u_C = 0$ -

b) forme canonique
 $\frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{RC} \right) u_C = \frac{E}{RC}$

1 SEH : $u_{CH} = K e^{-\frac{t}{\tau}}$ -

1 SP : $u_{CP} = E$ -

4) 1 SG : $u_C = E + K e^{-\frac{t}{\tau}}$ -

1 CI : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ -
 $E + K = 0 \Rightarrow K = -E$

1 solution : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ -

c) $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

①

$t=0 \Rightarrow u_c(0) = E(1 - e^0) = 0$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow u_c(t) \rightarrow E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
avec $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$

d'où $u_c(t) \rightarrow E$

d) * 100 % $\rightarrow 10V$
63 % $\rightarrow 6,3V$

Intersection avec la courbe

$\rightarrow$ On mesure $\tau = 100 \text{ ms}$

$\tau = RC$

$\Rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^3} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
 $= 100 \mu\text{F}$

②

* $t \rightarrow \infty \Rightarrow u_c \rightarrow 10V$ (lecture graphique)

d'où $E = 10V$

e) $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$

$= C \frac{d}{dt} (E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}))$

$= \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

3/a) $E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$

Charge terminée : $u_c = E$

d'où : $E_{cf} = \frac{1}{2} C E^2$

b) $p_g = R i^2$

$= \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}$

B) Thermos de café /20

② 1. $C = C_{\text{thermos}} + m \cdot c_{\text{el}}$

② 2. Transformation monovariable -
 $dh = \delta Q = C \cdot dT$

1 3. $dh = \delta Q = -aC(T - T_{\text{ext}})dt$

⑤ $dh = C \cdot dT$
 d'où :

$$-aC(T - T_{\text{ext}})dt = C \cdot dT$$

$$-aC(T - T_{\text{ext}}) = C \cdot \frac{dT}{dt}$$

⑤ 1 | $-aC \cdot T + aC \cdot T_{\text{ext}} = C \cdot \frac{dT}{dt}$

$$a \cdot T_{\text{ext}} = \frac{dT}{dt} + aT$$

$$T_{\text{ext}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dT}{dt} + T$$

1 1 $\tau = \text{Constante de temps}$

1 1 $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 \text{ s}$

1 4. SEH : $T_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

1 SP : $T_p = T_{\text{ext}}$

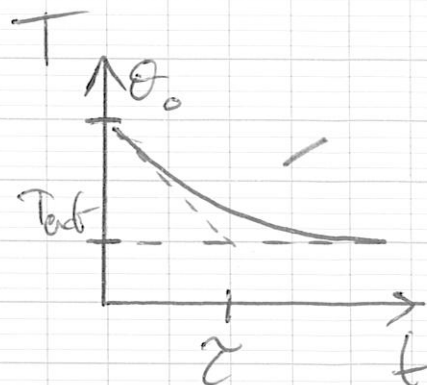
1 SG : $T(t) = T_{\text{ext}} + A e^{-\frac{t}{\tau}}$

⑦ 1 3 (nombre)
 1 CI : $T(0) = \theta_0 = T_{\text{ext}} + A$

d'où : $A = \theta_0 - T_{\text{ext}}$

Solution :

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (\theta_0 - T_{\text{ext}}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



5. Soit t_1 ce temps

On a aussi :

$$\theta_f = T_{ext} + (\theta_0 - T_{ext})e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$\theta_f - T_{ext} = (\theta_0 - T_{ext})e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$\left(\frac{\theta_f - T_{ext}}{\theta_0 - T_{ext}} \right) = e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$\ln \left(\frac{\theta_f - T_{ext}}{\theta_0 - T_{ext}} \right) = -\frac{t_1}{\tau}$$

$$t_1 = -\tau \ln \left(\frac{\theta_f - T_{ext}}{\theta_0 - T_{ext}} \right)$$

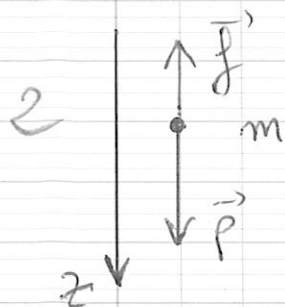
$$t_1 = +\tau \ln \left(\frac{\theta_0 - T_{ext}}{\theta_f - T_{ext}} \right)$$

$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{\theta_0 - T_{ext}}{\theta_f - T_{ext}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{AN: } t_1 &= \frac{1}{10^{-3}} \ln \left(\frac{30 - 20}{60 - 20} \right) = 10^3 \ln \left(\frac{10}{40} \right) \\ &= 10^3 \ln \left(\frac{1}{4} \right) = \underline{560 \text{ s}} \approx \underline{60 \text{ min}} \end{aligned}$$

c) Chute d'une goutte d'eau /14

1. BANE : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$



* associé à $E_p = -mgz + cte$
 $\vec{f} = -6\pi\eta_{air}r\vec{v}$
 $= -6\pi\eta_{air}r\dot{z}\vec{u}_z$
 associé à $P = -6\pi\eta_{air}r\dot{z}^2$
 $= -6\pi\eta_{air}r\dot{z}^2$

1 par le PFD (ou) Th. Energie Mécanique :
 $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) = P$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + cte\right) = P$$

$$m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} = -6\pi\eta_{air}r\dot{z}^2$$

$$\dot{z}(m\ddot{z} - mg + 6\pi\eta_{air}r\dot{z}) = 0$$

8

$$\dot{z} \neq 0$$

$$m\ddot{z} - mg + 6\pi\eta_{air}r\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{z} + 6\pi\eta_{air}r\dot{z} = mg$$

$$\ddot{z} + \frac{6\pi\eta_{air}r}{m}\dot{z} = g$$

1

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_{air}r}{m}v = g$$

on identifie :

2

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta_{air}r}$$

En écrivant :

1

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{on obtient :}$$

1

$$\tau = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{6\pi\eta_{air}r} = \frac{2}{9} \frac{\rho r^2}{\eta_{air}}$$

3. v_{lim} est atteinte lorsque $\frac{dv}{dt} = 0$

1

$$\cancel{\frac{dv}{dt}} + \frac{1}{\tau} v_{\text{lim}} = g$$

(2)

$$\frac{g \eta_{\text{air}}}{2 \rho r^2} v_{\text{lim}} = g$$

1

$$v_{\text{lim}} = \frac{2 r^2}{g \eta_{\text{air}}} \rho g$$

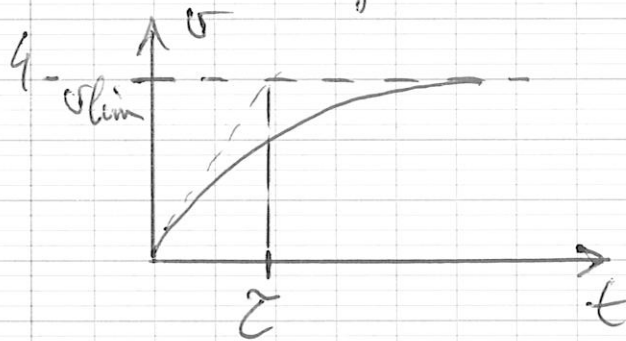
(On obtient le signe $\ominus$ dans le cas d'un axe z gradué vers le bas).

1

(4)

1

2



Allure -

v_{lim} -
 τ -

1. $\vec{P}' = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ - Verticale, vers le bas

(4) 2 $\vec{T}' = -k(z - l_0)\vec{u}_z$ - Verticale, sens changeant,
 2 $\|\vec{P}'\| = mg$
 1 $\|\vec{T}'\| = k|z - l_0|$

2. Equilibre $\sum \vec{F}' = \vec{0}$
 $\vec{P}' + \vec{T}' = \vec{0}$

- $mg - k(z_e - l_0) = 0$

- $mg - kz_e + kl_0 = 0$

- $mg + kl_0 = kz_e$

- $\frac{mg}{k} + l_0 = z_e$ (1)

3. $\sum \vec{F}' = m\vec{a}' = m\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{p}'}{dt}$

- $mg\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

- $mg\vec{u}_z - k(z - z_e + z_e - l_0)\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

- $mg - k(z_e - l_0) - k(z - z_e) = m\ddot{z}$

= 0 d'après (1)

- $kz + kz_e = m\ddot{z}$

$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$ (2)

4. $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_e$

1. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

(7) 1. A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{10^5}{10^3}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ - $T_0 = \frac{2\pi}{10} = 0,63 \text{ s}$

5. $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_e$
 $A \text{ à } t=0$

$z(0) = z_0$

$A \cos \varphi + z_e = z_0 \quad (a)$

$\dot{z}(0) = 0$

$\dot{z}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
 $\dot{z}(0) = -A \omega_0 \sin \varphi = 0 \quad (b)$

$\Rightarrow A=0$ Cas physique très intéressant!
 $\textcircled{a} \varphi=0$

④

$(a) \Rightarrow A + z_e = z_0$

$\Rightarrow A = z_0 - z_e$

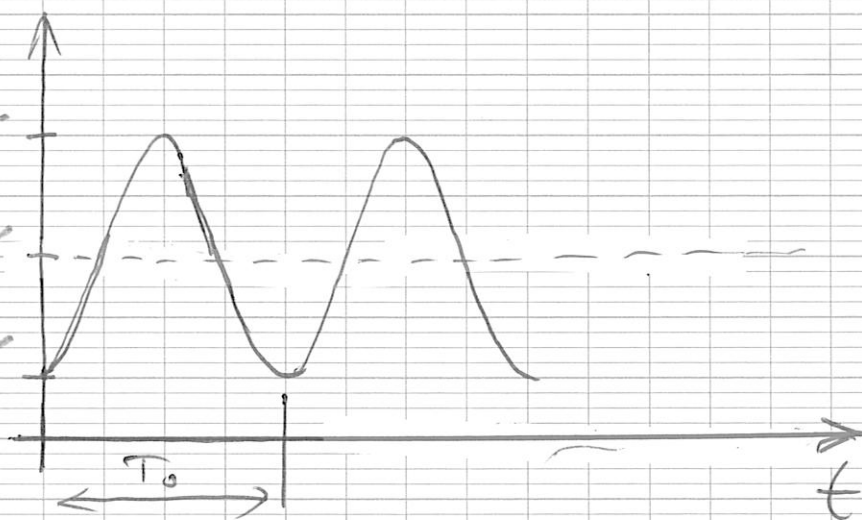
D'où :

$z(t) = (z_0 - z_e) \cos \omega_0 t + z_e$

1 (Allure) / 6.
 1 $\text{dur } T_0$

1 $z_{\text{moy}} = z_e$

1 $z_{\text{min}} = z_0$



⑤

$z_{\text{min}} = z_0 \quad (\text{pour } \cos \omega_0 t = 1)$

$z_{\text{moy}} = z_e$

$z_{\text{max}} = -z_0 + z_e + z_e = 2z_e - z_0$
 (pour $\cos \omega_0 t = -1$)

$$7. \quad \|\vec{F}\| = |k| \|\vec{v}\|$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 N $m \cdot s^{-1}$

(1)

$$k \text{ en } N \cdot s \cdot m^{-1} -$$

$$\text{cad } kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot s \cdot m^{-1}$$

$$\text{cad } kg \cdot s^{-1}$$

$$8. \quad \begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -k(z - l_0)\vec{u}_z \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \vec{P} \\ \vec{T} \end{matrix}} \right\} \text{ Déjà évalué (4)}$$

(3) | 2 |
1

$$\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z, \text{ verticale, de sens opposé à la vitesse, } \|\vec{F}\| = h|\dot{z}|$$

Véhicule à l'équilibre
 $\Rightarrow$ même bilan qu'an 2). -

9. En ajoutant $\vec{F}$ au bilan de 3), on obtient:

(2) | 1 |
1

$$-k(z - z_e) - h\dot{z} = m\ddot{z} -$$

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kz_e -$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

10. Equations caractéristiques:

1

$$r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0 -$$

1

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} -$$

1 | 1

1er cas: $\Delta > 0 \quad \frac{h^2}{m^2} > 4\frac{k}{m} \Leftrightarrow h > 2\sqrt{km} -$
 Régime aperiodique (voir Q. 11)

⑥ | 1 2^{er} cas : $\Delta = 0 \quad \frac{h^2}{m^2} = 4 \frac{k}{m} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{km}$
 (cas critique)
 Regime critique

1 3^{er} cas : $\Delta < 0 \quad \frac{h^2}{m^2} < 4 \frac{k}{m} \Leftrightarrow h < 2\sqrt{km}$
 Regime pseudo-periodique.

11.1. Regime critique : $\frac{h^2}{m^2} = 4 \frac{k}{m}$
 $\frac{h^2}{m} = 4k$

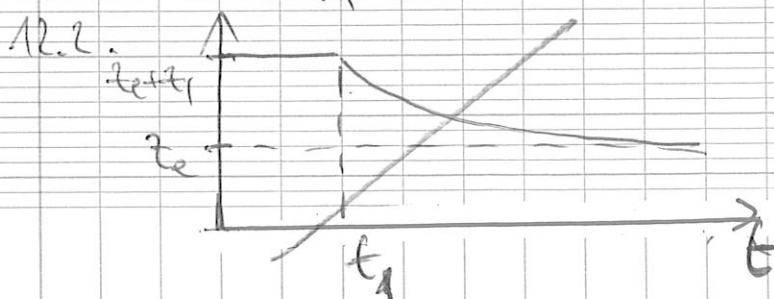
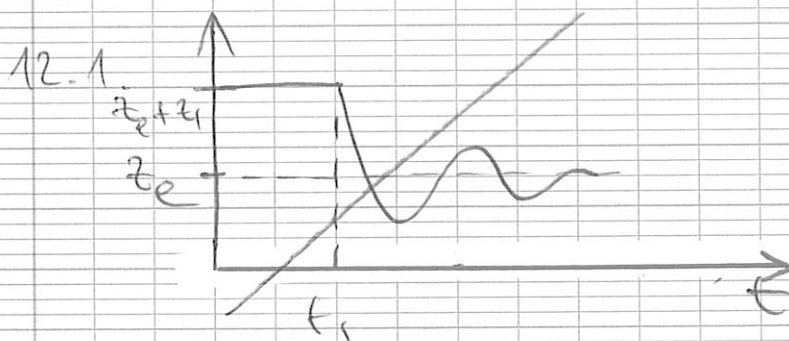
$h = \sqrt{4km}$

$h = 2\sqrt{km}$

②

Vehicule en charge $\Rightarrow m \uparrow$
 $\Rightarrow h < 2\sqrt{km}$
 $\Rightarrow$ Regime pseudo-periodique.

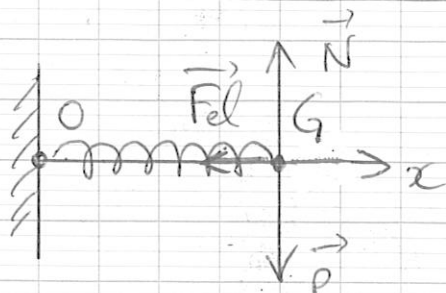
① 11.2. Il faut choisir $h > 2\sqrt{km}$
 avec $m = m_0 = \text{masse a vide}$



Problème : Gestion du recul d'un canon

(2,5)

1. BASE :



$\vec{P}$ et $\vec{N}$ ne travaillent pas (car $\perp$ au mouvement)

1 $E_{pp} = \text{cte}$

1 $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$

(4) 1 $E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$

$E_M = E_{pp} + E_{\text{el}} + E_c$

1 $E_M = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \text{cte}$

2. Conservation de l'énergie mécanique

1 $E_M(-d) = E_M(0)$
 1 $\frac{1}{2}k(-d)^2 + \underbrace{0}_{v=0} = \frac{1}{2}k(l_0-l_0)^2 + \frac{1}{2}Mv_r^2$
 (note: "recul de d" is written under the first term)

$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}Mv_r^2$

(4) avec $v_p = -\frac{m}{M}v_0$
 on obtient :

$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v_0^2$

1 $k = \frac{m^2v_0^2}{d^2M}$

1 AN: $k = \frac{2^2 \times 50^2}{1^2 \times 800^2} = \frac{4 \times 2500}{800} = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$

$$1 \quad 3. \quad \frac{dE_M}{dt} = P_{nc} = 0 - (\text{Th. } E_M \text{ @ } P_M)$$

$$1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k (x - l_0)^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right) = 0 -$$

$$k \dot{x} (x - l_0) + M \dot{x} \ddot{x} = 0$$

(4)

$$\dot{x} (k(x - l_0) + M \ddot{x}) = 0$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{non retenu}$$

(ou)

$$k(x - l_0) + M \ddot{x} = 0$$

soit l'équation canonique :

$$11 \quad \ddot{x} + \frac{k}{M} x = \frac{k}{M} l_0 - \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} -$$

6. Solution :

$$1 \quad x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) -$$

$$1 \quad x_p = l_0 -$$

$$1 \quad x(t) = l_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) -$$

$$CI : \quad \begin{aligned} x(0) &= l_0 \\ \dot{x}(0) &= v_r \end{aligned}$$

(5)

$$1 \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) -$$

$$\begin{cases} x(0) \underset{CI}{=} l_0 \underset{maths}{=} l_0 + A \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_r = \omega_0 B \Rightarrow B = \frac{v_r}{\omega_0} \end{cases}$$

On obtient :

$$1 \quad x(t) = l_0 + \frac{v_r}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} -$$

$$1 \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} -$$

② 1 Av:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{800}{12,5}} \approx 2\pi \sqrt{60} \approx 2 \times 3 \times 8 \approx 50 \text{ s} -$$

$$T. \quad k = \frac{m\omega_0^2}{d^2M}$$

②

$$d'ou : d^2 = \frac{m\omega_0^2}{kM}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

1 Si $k \uparrow$, alors $d \downarrow$ -

Si $k \uparrow$, $T_0 \downarrow$

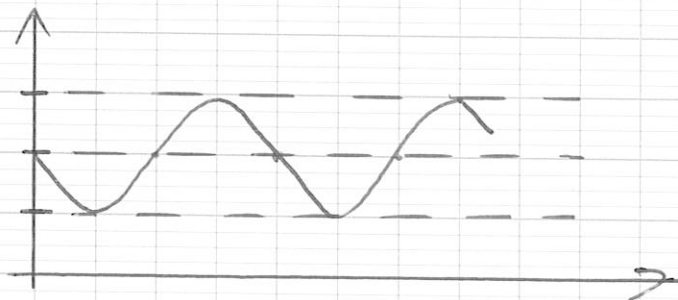
7.

④

$$x_{\max} = l_0 + d$$

l_0

$$x_{\min} = l_0 - d$$



PROBLEME N°4 : THERMODYNAMIQUE (ENVIRON 30 % DU BAREME)

42

A) Questions de formulaire

- Pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, donner la loi de Laplace, $PV^\gamma = \text{cte}$
- Pour un gaz parfait, écrire une relation entre la variation d'enthalpie H et la variation de température T , $\Delta H = C_p \cdot \Delta T = n \cdot C_{pm} \cdot \Delta T = n \cdot C_p \cdot \Delta T$ (au)
- Donner une loi des moments permettant de calculer le titre en vapeur x_v pour un mélange diphasique Liquide + Gaz, $x_v = \frac{y \cdot \Delta h}{h - h_L}$
- Donner la définition de la chaleur latente (massique) de vaporisation.

B) Compression et détente d'un fluide frigorigène

On donne : Constante des gaz parfaits $R = 8.31 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$: Masse molaire du fluide : $M = 100 \text{ g/mol}$.

Aide aux calculs : $\ln\left(\frac{15}{125}\right) = -2.1$

On étudie les transformations thermodynamiques d'un réfrigérant (1,1,1,2-tétrafluoroéthane ou R134a) dont on donne :

- le diagramme (P, h) en **annexe 1 (à rendre avec la copie)**
- le diagramme (T, s) en **annexe 2 (à rendre avec la copie)**
- un extrait de tables thermodynamiques en **annexe 3 (à rendre avec la copie)**

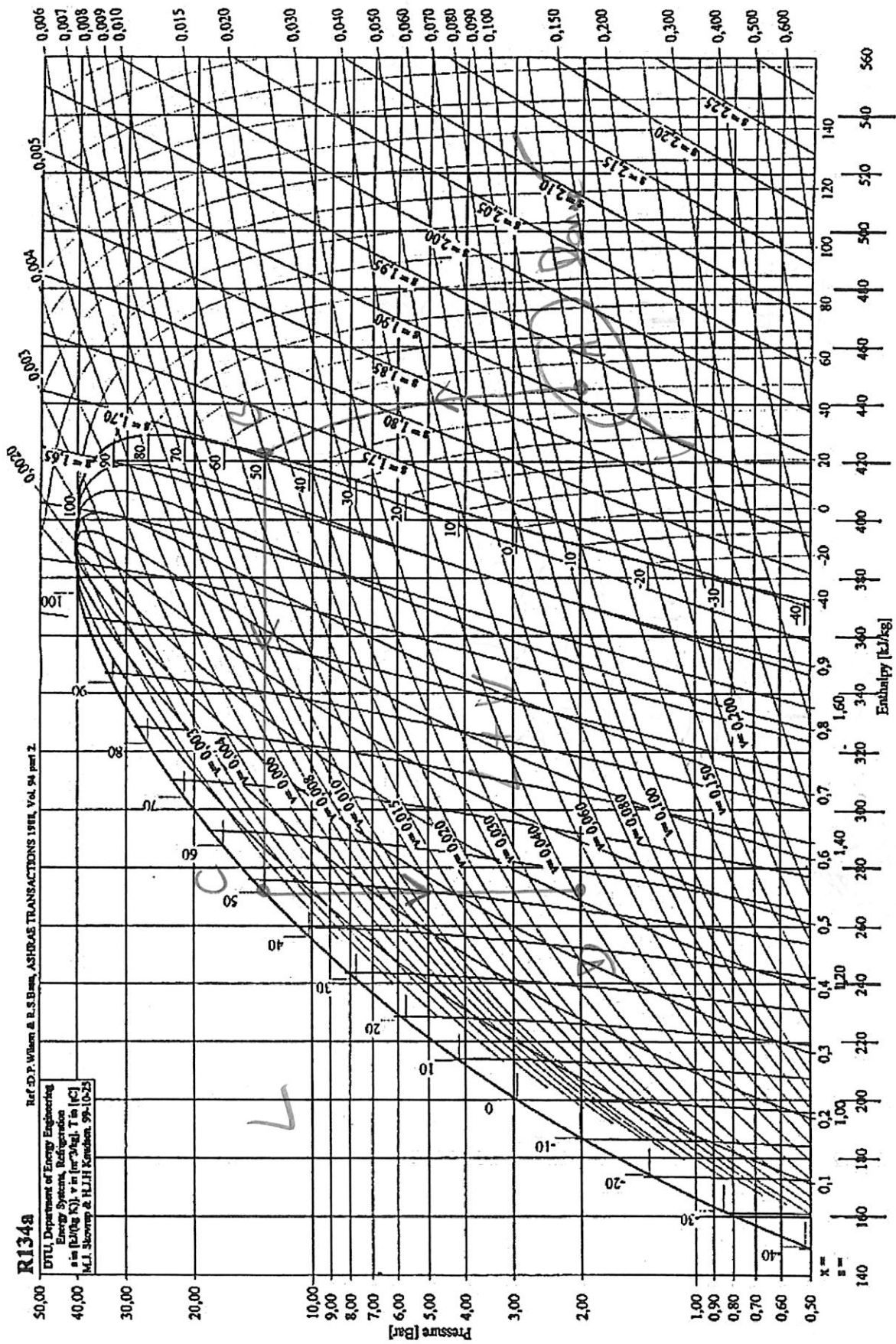
Le tableau récapitulatif en **annexe 4** est également à rendre avec la copie.

Dans l'état initial noté A, le fluide est à une pression de $P_A = 2 \text{ bars}$ et une température $T_A = 50^\circ\text{C}$.

Il est ensuite comprimé de manière isotherme mécaniquement réversible jusqu'au point B (vapeur saturante), puis subit une liquéfaction totale isotherme jusqu'au point C (liquide saturant).

Il est ensuite détendu de manière isenthalpique pour retomber à une pression de 2 bars (point D).

- 1) Sur chacun des diagrammes (P, h) et (T, s) , indiquer les domaines liquide, diphasique et gazeux. $3 \times 0,5$ $2 \times 0,5$
- 2) Compléter le diagramme (P, h) puis le diagramme (T, s) , en y indiquant les points A, B, C et D. 4×1 4×1
- 3) Indiquer deux méthodes permettant de déterminer le titre en vapeur x_{vD} au point D à partir des diagrammes (P, h) et / ou (T, s) . $2 + 2$
- 4) Compléter le tableau en annexe 4. $18 \times 0,5$
- 5) A partir des tables fournies en annexe 3, confirmer quelques valeurs du tableau précédent, puis calculer un ordre de grandeur de x_{vD} . Justification : Entourer sur l'annexe 3 les données prises en compte. 2×1
- 6) Calculer le travail W_{AB} fourni par le compresseur pour comprimer 1 kg de R134a de manière isotherme à 50°C . 2×1
- 7) Sur votre copie, tracer l'allure du diagramme de Clapeyron (P, v) , ainsi que les points A, B, C et D. $(P, v) + \text{courbe} \rightarrow 2$
 $A, B, C, D \rightarrow 4$



⊕ Toleam
A.B.C.D

T.P.R.S, 201
à computer

4 - $E =$ "le livre choisi est un essai"

$\bar{E} =$ "le livre choisi n'est pas un essai"

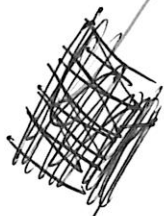
$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

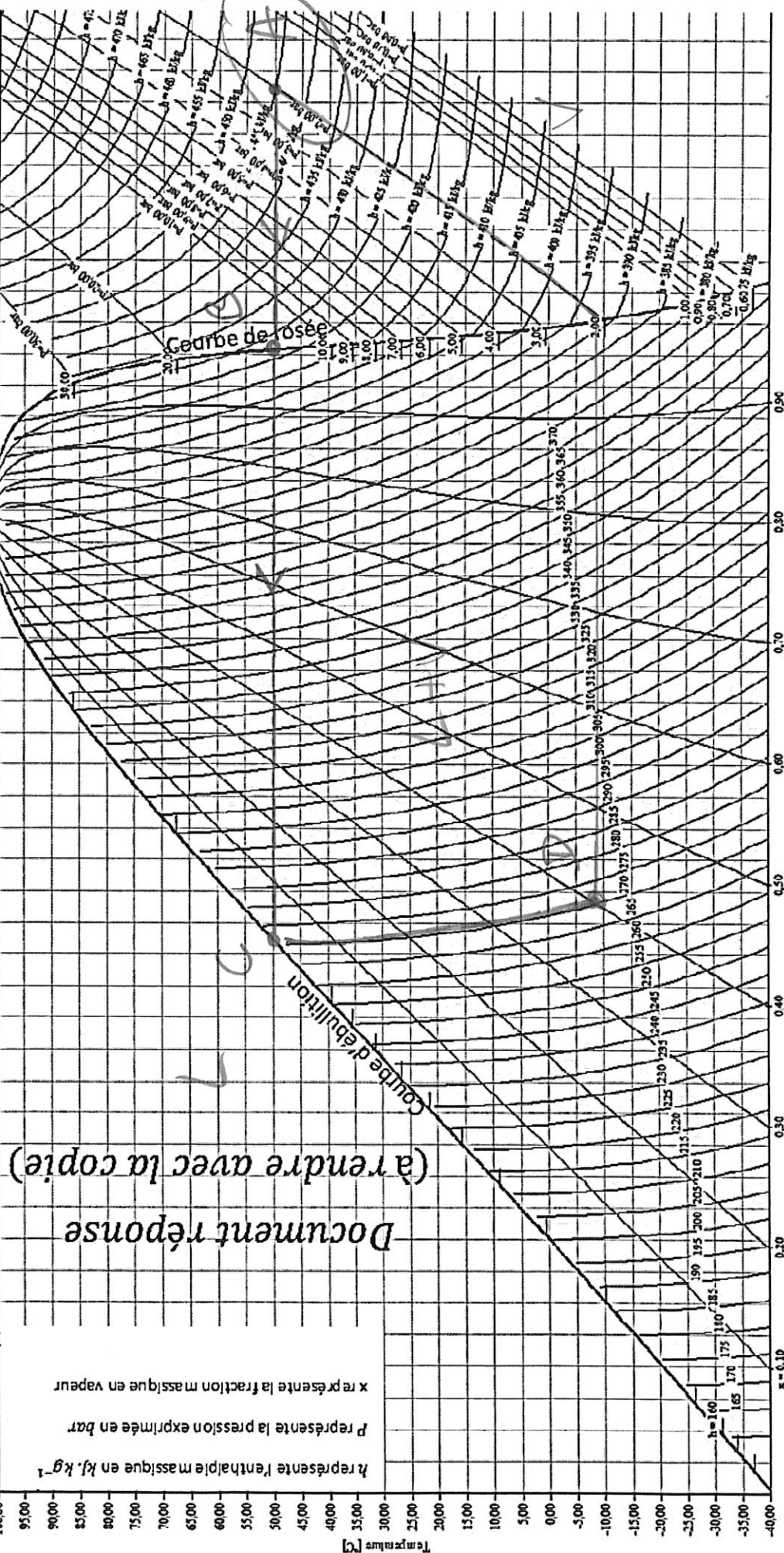
$$1 - 0,25$$

$$= 1 - 0,25$$

$$= 0,75$$

$$5 - P_f(E) = \frac{5}{60} = 0,083.$$





800 825 850 875 900 925 950 975 1000 1025 1050 1075 1100 1125 1150 1175 1200 1225 1250 1275 1300 1325 1350 1375 1400 1425 1450 1475 1500 1525 1550 1575 1600 1625 1650 1675 1700 1725 1750 1775 1800 1825 1850 1875 1900 1925 1950 1975 2000 2025 2050 2100

NOM :

Annexe 4

○ → Tables

	Température T (°C)	Pression P (bar)	Enthalpie Massique h (kJ/kg)	Entropie massique s (kJ/(kg.K))	Titre en vapeur x_v
Point A	50	2	440	1,92	1
Point B	50	13 (13,2)	420 (423)	1,70 (1,70)	1
Point C	50	13 (13,2)	270 (271)	1,23 (1,23)	0
Point D	-10	2	270	1,27	0,40

En utilisant R :

$$x_{vD} = \frac{h_D - h_L}{h_v - h_L} = \frac{270 - 186,7}{392,7 - 186,7} = 0,40$$

$$W_{AB} = - \int P \cdot dV$$

$$W_{AB} = - n R T_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

$$= - \frac{m}{M} R T_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} V_C = \\ V_B = 0,015 \\ V_A = 0,125 \end{matrix}}$$

$$= - \frac{1}{0,1} \times 8,31 \times (273 + 10) \times \ln \left(\frac{0,015}{0,125} \right)$$

$$\approx 10 \times 8,31 \times 323 \times 2,1$$

$$\approx 10 \times 10 \times 300 \times 2$$

$$\approx 60 \cdot 10^3 \text{ J} \approx 60 \text{ kJ}$$

