CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 12 (16 au 20 décembre 2024)

Chapitres étudiés et questions de cours :

T5 : Machines thermiques

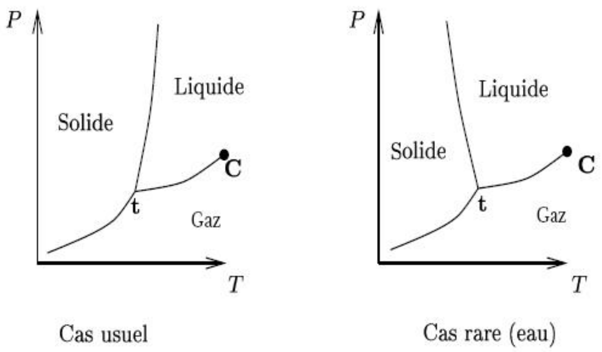
M5 : Oscillations forcées et résonance

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

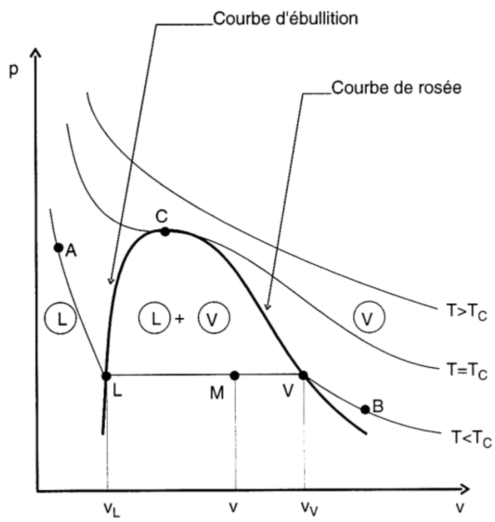
1ère question de cours : questions 1 à 6.

2ème question de cours : questions 7 à 10.

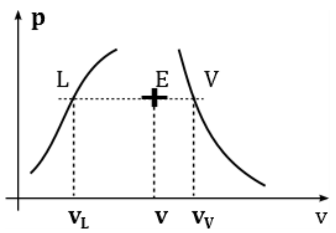
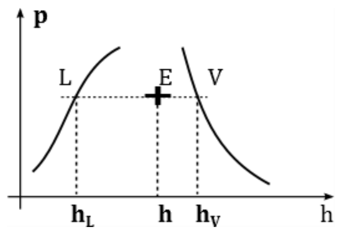
1) Diagramme de phase (P, T) d'une espèce diphasée : **tracer l'allure du diagramme**, placer les phases Solide S, Liquide L, Gazeuse G, le point triple t, le point critique C.



2) Diagramme de Clapeyron (P, v) d'une espèce diphasée (**fourni**) : savoir placer les phases Liquide L, Gazeuse G , la zone d'équilibre liquide vapeur LG, savoir tracer une isotherme, identifier la courbe d'ébullition, la courbe de rosée.



3) Donner la règle des moments permettant de définir le titre en vapeur x à partir du diagramme de Clapeyron ou du diagramme des frigoristes (Réaliser le schéma associé).

Diagramme de **Clapeyron :** p fonction de v	Diagramme des **frigoristes :** p fonction de h
	
$x = \frac{LE}{LV} = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$	$x = \frac{LE}{LV} = \frac{h - h_l}{h_v - h_l}$

4) Premier principe en système ouvert dans le cas d'un écoulement permanent de débit massique D_m à travers un organe ou une machine : Equation massique (écriture en J/kg), équation en termes de puissance (écriture en W). Définir les différents termes introduits.

Premier principe appliqué à un écoulement permanent, équation massique :

$$(h_s - h_e) + (½\, c_s^2 - ½\, c_e^2) + (gz_s - gz_e) = w_i + q \qquad \textbf{(unité : J/kg)}$$

Entrée		Sortie	
c_e	Vitesse du fluide en entrée (m/s)	c_s	Vitesse du fluide en sortie (m/s)
z_e	Altitude en entrée (m)	z_s	Altitude en sortie (m)
h_e	Enthalpie massique en entrée (J/kg)	h_s	Enthalpie massique en sortie (J/kg)

w_i = **travail indiqué massique** (*ou* travail massique net *ou* travail massique différent du travail des forces de pression)

q = **transfert thermique massique**.

Premier principe appliqué à un écoulement permanent, équation en termes de puissance :

$$D_m\,[(h_s - h_e) + (½\, c_s^2 - ½\, c_e^2) + (gz_s - gz_e)] = P_i + P_{th} \qquad \textbf{(unité : W)}$$

Où $D_m = \frac{dm}{dt}$ débit massique (en kg.s^{-1}),

Puissance indiquée (utile) reçue P_i : $P_i = \frac{\delta W_i}{dt}$

Puissance thermique reçue P_{th} : $P_{th} = \dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$

5) Donner l'amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ associées à la grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

- **Amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$**

L'amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$ associée à la grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est par définition

$$\underline{X(t)} = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} ; \qquad \text{on a donc} \qquad X(t) = \mathcal{R}e(\underline{X(t)})$$

En pratique, pour retrouver les caractéristiques de la grandeur réelle, on utilise :

$$X_m = \left|\underline{X(t)}\right| \qquad \text{et} \qquad Arg\left(\underline{X(t)}\right) = \omega t + \varphi$$

- **Amplitude complexe $\underline{X_m}$**

On pose $\underline{X(t)} = \underline{X_m} e^{i\omega t}$ soit $\underline{X_m} = X_m e^{i\varphi}$

On a alors $X_m = \left|\underline{X_m}\right|$ et $Arg\left(\underline{X_m}\right) = \varphi$

L'amplitude complexe $\underline{X_m}$ contient **l'ensemble des informations recherchées : l'amplitude** du signal recherché **est égale à son module et la phase à son argument.**

6) Donner les analogies électromécaniques, les définitions de l'impédance électrique et de l'impédance mécanique, ainsi que les impédances complexes des 3 dipôles R, L et C.

Mécanique	Electricité
Elongation *x* (m)	Charge *q* (C)
Vitesse *v* (m.s^{-1})	Intensité *i* (A)
Masse *m* (kg)	Inductance *L* (H)
Raideur *k* (N.m^{-1})	$\frac{1}{C}$ avec Capacité *C* (F)
Frottement *h* (N.m^{-1}.s)	Résistance *R* (Ω)
Force *F* (N)	Tension *u* (V)

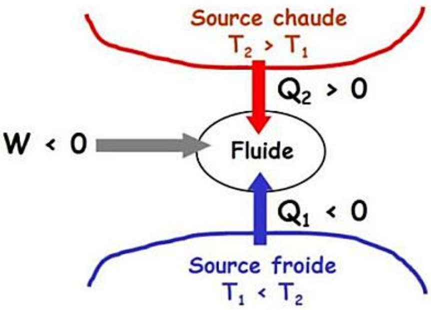
Impédance complexe d'un dipôle en convention récepteur en électrocinétique : $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

Impédances complexes de R, L et C :

$R \quad \underline{Z}_R = R \qquad L \quad \underline{Z}_L = jL\omega \qquad C \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

Impédance mécanique complexe : $\underline{Z}_{méca} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$

7) Expression générale du rendement d'un moteur thermique ; Cycle de Carnot : **retrouver** l'expression du rendement en fonction des températures des sources chaude et froide.



$\eta = -\frac{W_{TOT}}{Q_C}$ (1)

Premier principe appliqué au cycle :

$\Delta U_{cycle} = W_{TOT} + Q_C + Q_f = 0$ d'où : $W_{TOT} = -Q_C - Q_f$ (2)

Deuxième principe appliqué au cycle :

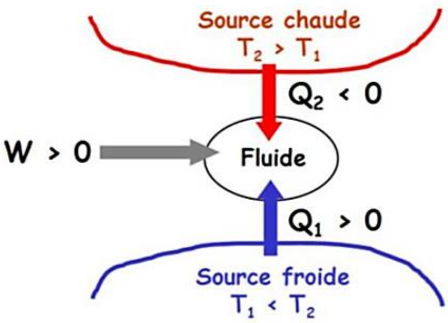
$\Delta S_{cycle} = S_{éch} + S_{créée} = 0$

Cycle réversible, d'où :
$\Delta S_{cycle} = S_{éch} + S_{créée} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_f}{T_f} + 0$ d'où : $Q_f = -Q_C \frac{T_f}{T_C}$ (3)

De (1), (2) et (3) on déduit le rendement de Carnot :

$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C}$

8) Expression générale de l'efficacité d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ; Cycle de Carnot : **retrouver** l'expression de l'efficacité en fonction des températures des sources chaude et froide.



$e_{frigo} = \frac{Q_f}{W}$ et $e_{PAC} = -\frac{Q_C}{W}$ (1)

Premier principe appliqué au cycle :

$\Delta U_{cycle} = W + Q_C + Q_f = 0$ d'où : $W = -Q_C - Q_f$ (2)

Deuxième principe appliqué au cycle :

$\Delta S_{cycle} = S_{éch} + S_{créée} = 0$

Cycle réversible, d'où :
$\Delta S_{cycle} = S_{éch} + S_{créée} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_f}{T_f} + 0$ (3)

De (1), (2) et (3) on déduit l'efficacité de Carnot :

$e_{frigo} = \frac{T_f}{T_C - T_f}$ et $e_{PAC} = \frac{T_C}{T_C - T_f}$

9) Déterminer la Solution Particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Déterminer l'expression de l'amplitude réelle X_m de la solution.

On cherche une Solution Particulière du type : $x(t) = X_m cos\,(\omega t + \varphi)$.
Passage aux complexes :

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\,\underline{\dot{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t) \quad \Rightarrow \; -\omega^2\,\underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega\,\underline{x} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)X_m\exp(i\varphi)\exp(i\omega t) = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)X_m\exp(i\varphi) = \omega_0^2\,X_0$$

On établit l'amplitude complexe de l'élongation :

$$\boxed{X_m\exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{\omega_0^2\,X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)}}$$

On introduit la pulsation réduite : $\boldsymbol{u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}}$

En divisant Numérateur et Dénominateur par ω_0^2, on obtient :

$$\boxed{X_m\exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}}$$

On en déduit l'amplitude réelle du mouvement oscillant forcé :

$$X_M = \left|\underline{X_M}\right| = |X_m\exp(i\varphi)| = \left|\frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}\right| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}\right|}$$

On obtient : $$\boxed{\boldsymbol{X_M(u) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}}}$$

10) A partir de l'expression de l'amplitude de l'élongation X_M en fonction de la pulsation réduite *u* :

$$X_M = \frac{X_0}{\sqrt{(1-\,u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Déterminer la condition de résonance en élongation.
Tracer l'allure de la courbe X_M en fonction de *u*.

On s'intéresse aux variations de X_M avec u.

Le numérateur de X_M est une constante positive, on peut donc simplifier l'étude en étudiant le dénominateur de X_M, et même le carré de celui-ci.

On définit $D(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$; de sorte que $X_M = \frac{X_0}{\sqrt{D(u)}}$

L'amplitude est alors maximale pour une fréquence telle que le dénominateur $D(u)$ est minimal.

Il faut donc chercher la pulsation réduite u telle que $\frac{dD}{du} = 0$

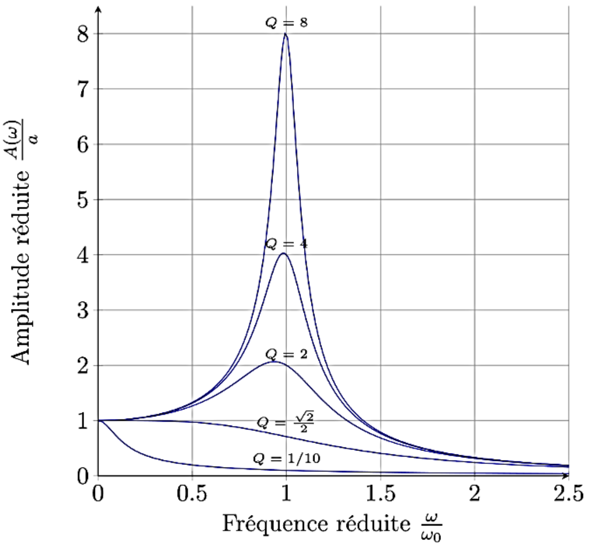
$\frac{dD}{du} = 2 \times (-2u) \times (1-u^2) + \frac{2}{Q}\ \frac{u}{Q} = 4u\left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$

$$\frac{dD}{du} = 4\,u\left(u^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) = 0$$

$\frac{dD}{du}$ s'annule en $u = 0$ et, **éventuellement**, selon le signe de $1-\frac{1}{2Q^2}$, en $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$:

Si $1-\frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ impossible $\Leftrightarrow$ **Pas de résonance en élongation**

Si $1-\frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ possible $\Leftrightarrow$ **Résonance en élongation**



Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

Diagramme fonctionnel des machines cycliques dithermes	Prévoir les signes des transferts d'énergie. Définir le rendement d'un moteur. Définir le coefficient de performance (CoP) d'une machine frigorifique et celui d'une pompe à chaleur (PAC).

10. Machines dithermes	
Le premier principe en système ouvert	Définir un système ouvert en écoulement stationnaire. Utiliser des grandeurs massiques ; définir le travail indiqué massique sur les parties mobiles. Décrire les différents organes des machines (détendeur, compresseur, turbine, condenseur, évaporateur, chambre de combustion, etc.). Appliquer le premier principe en système ouvert.
Système diphasé liquide-vapeur	Exploiter les diagrammes (T,s), (h,s) et (p,h).

Théorèmes des moments	Calculer ou exploiter un titre massique en vapeur.
Exploitations de diagrammes ou de tableaux de données	Calculer les transferts thermiques massiques, les travaux indiqués massiques et le coefficient de performance (CoP).
Puissances	Utiliser le débit massique pour évaluer des puissances.
11. Utilisation d'un modèle	
Technologie des moteurs à pistons	Distinguer les temps mécaniques (4 temps ou 2 temps) et identifier les temps thermodynamiques (modélisation par des transformations thermodynamiques).
Modèle du gaz parfait	Calculer un paramètre avec l'équation d'état du gaz parfait. Utiliser, dans l'approximation où les capacités thermiques à pression constante et à volume constant sont constantes, la relation de Mayer et le coefficient isentropique. Citer quelques limites du modèle.
Loi de Laplace	Utiliser les lois de Laplace pour évaluer des pressions ou des températures dans le cas de compressions ou détentes de gaz parfait dans l'hypothèse adiabatique et mécaniquement réversible.
Diagramme de Clapeyron	Tracer un cycle dans l'approximation d'une transformation mécaniquement réversible.
Aspects énergétiques	Calculer les transferts thermiques, les travaux et en déduire le coefficient de performance (CoP) ou le rendement.
Puissance, consommation	Lier la puissance au nombre de tours par minute.

Notions et contenus	Capacités exigibles
13. Oscillations forcées	
Régime sinusoïdal forcé	Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal. Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant. Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels. Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude.
Analogies électromécaniques	Montrer que le modèle reste pertinent pour des systèmes mécaniques ou électriques où les équations décrivant le système sont données.