MATHS 4 : UTILISATION DES COMPLEXES EN PHYSIQUE

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Forme algébrique : $\underline{z} = a + i\,b$

$i^2 = -1$ ou $j^2 = -1$; $a = Re(\underline{z})$: partie réelle ; $b = Im(\underline{z})$: partie imaginaire ;

Forme trigonométrique : $\underline{z} = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = cos\theta + i\,sin\theta$; $r = |\underline{z}|$ (ou ρ ou z) : module ; Arg($\underline{z}$) = θ (ou φ) : argument ;

Remarques :

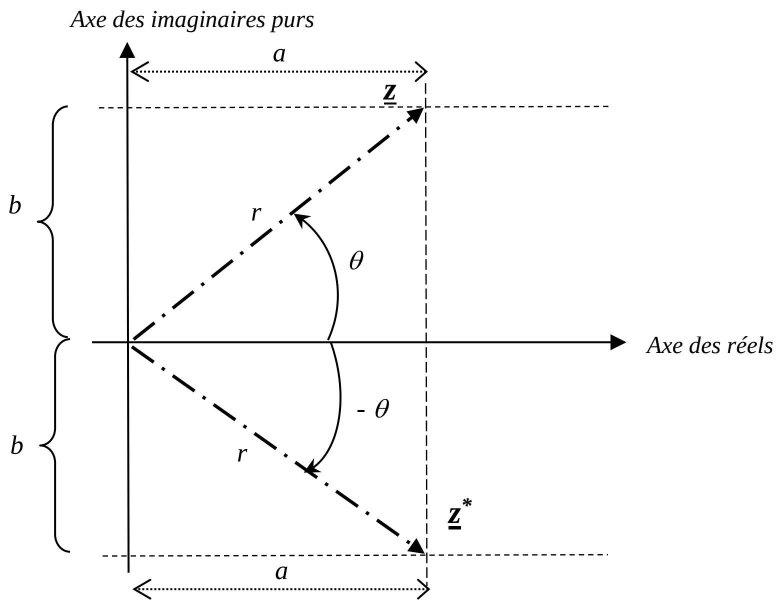
- On choisira la notation la plus adaptée au problème traité.
- La représentation complexe étant souvent employée en électricité où la lettre i est habituellement utilisée pour les intensités, le physicien remplace souvent le nombre complexe i par la notation j.
- On notera $\underline{z}$ (**souligné**) un nombre complexe quelconque, pour le distinguer des grandeurs réelles. Ainsi, si u_R désigne la tension **réelle** aux bornes de la résistance R, $\underline{u_R}$ désigne la tension **complexe** associée.

Complexe conjugué : $\underline{z}^* = a - j\,b = r\,e^{-j\theta}$

Remarque : $\underline{z}\,.\,\underline{z}^* = r^2 \quad\Rightarrow\quad |\underline{z}| = \sqrt{\underline{z}\,.\,\underline{z}^*}$

En physique, cette propriété est souvent utilisée pour les nombres complexes sous forme de fraction.

2. REPRESENTATION GRAPHIQUE



Relations entre les grandeurs $a, b,\ r$ et θ:

$$a = r\cos\theta;\ b = r\sin\theta;$$
$$|\underline{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Remarque :

Arg($\underline{z}$) = θ = arctan$\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$;

Arg($\underline{z}$) = θ = arctan$\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ si $a < 0$

3. RELATIONS UTILES

$$\underline{z_1} = \underline{z_2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

Attention !!! si on oublie qu'une égalité entre nombres complexes correspond à un **système** de **deux** équations entre nombres réels, une partie de l'information est perdue et le problème ne peut souvent pas être résolu !!

$$\underline{z} = \frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{z_1}{z_2} & \left(ou\ |\underline{z}| = \dfrac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|} \right) \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 & \left(ou\ Arg(\underline{z}) = Arg(\underline{z_1}) - Arg(\underline{z_2}) \right) \end{cases}$$

$$\underline{z} = \underline{z_1}.\underline{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = z_1.z_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

Plus généralement :

$$\underline{z} = \underline{z_1}^{\alpha}.\underline{z_2}^{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = z_1^{\alpha}.z_2^{\beta} \\ \theta = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \end{cases}$$

Attention !!! $\underline{z} = \underline{z_1} + \underline{z_2}$ **n'implique pas** que $z = z_1 + z_2$!!

Égalité	Représentation algébrique		Représentation trigonométrique	
$\underline{z}_1 = \underline{z}_2$	$a_1 = a_2$	$b_1 = b_2$	$r_1 = r_2$	$\theta_1 = \theta_2$
$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$	$a = a_1 + a_2$	$b = b_1 + b_2$	peu adaptée	
$\underline{z} = \lambda\underline{z}_1 + \mu\underline{z}_2$	$a = \lambda a_1 + \mu a_2$	$b = \lambda b_1 + \mu b_2$	"	
$\underline{z} = \underline{z}_1\underline{z}_2$	peu adaptée		$r = r_1 r_2$	$\theta = \theta_1 + \theta_2$
$\underline{z} = \dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$			$r = \dfrac{r_1}{r_2}$	$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$\underline{z} = \underline{z}_1^{\alpha}\underline{z}_2^{\beta}$			$r = r_1^{\alpha} r_2^{\beta}$	$\theta = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2$

4. Applications essentielles a l'etude du regime sinusoïdal force (elec – meca)

$\boxed{\underline{X} = Xe^{j\varphi}}$ est l'*amplitude complexe* associée à la grandeur réelle $X\cos(\omega t + \varphi)$

Impédance complexe d'un dipôle :

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}}$$

avec :

$$R = Re(\underline{Z}) = Z\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad X = Im(\underline{Z}) = Z\sin\varphi$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

et :

$$\varphi = \arg\underline{Z} = \arctan\frac{X}{R} \qquad \underline{\text{si}} \qquad R > 0$$

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

d'où :

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}\right| = \frac{|\underline{v}_s|}{|\underline{v}_e|} = \frac{V_s}{V_e}$$

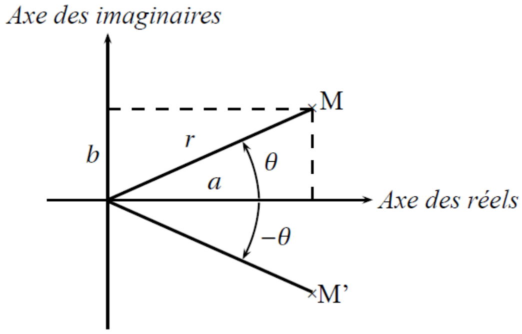
et :

$$\varphi = \arg\underline{H} = \arg\left(\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}\right) = \arg\underline{v}_s - \arg\underline{v}_e$$

NB En physique, il est très rare de multiplier par la quantité conjuguée "en haut et en bas" pour calculer un module ou un argument !

Rappel sur les nombres complexes et leur representation

NB En physique, on note j le nombre imaginaire tel que $j^2 = 1$.



À un point M quelconque du plan des complexes, on peut associer une **affixe** $\underline{z}$ telle que :

$$\boxed{\underline{z} = a + jb = re^{j\theta}}$$

partie réelle
$a = Re(\underline{z}) = z\cos\theta$

module
$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

partie imaginaire
$b = Im(\underline{z}) = z\sin\theta$

argument
$\theta = \arg\underline{z}$ tq $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

Attention, la fonction arctan donnant des résultats entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, on peut écrire $\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ***seulement si*** *$a > 0$.*
Dans le cas contraire, $\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi$.

Attention, pour un imaginaire pur $\underline{z} = jb$, il est inutile et dangereux de chercher à écrire l'argument sous cette forme ! On a tout simplement $\arg\underline{z} = \dfrac{\pi}{2}$ si $b > 0$, et $-\dfrac{\pi}{2}$ sinon.

M' correspond au **conjugué** de M, d'affixe :

$$\underline{z}^* = a - jb = re^{-j\theta}$$

On remarque que $r^2 = \underline{z}\,\underline{z}^*$.

Une égalité entre complexes correspond à **deux** égalités entre réels :

Égalité	Représentation algébrique		Représentation trigonométrique	
$\underline{z}_1 = \underline{z}_2$	$a_1 = a_2$	$b_1 = b_2$	$r_1 = r_2$	$\theta_1 = \theta_2$
$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$	$a = a_1 + a_2$	$b = b_1 + b_2$	peu adaptée	
$\underline{z} = \lambda\underline{z}_1 + \mu\underline{z}_2$	$a = \lambda a_1 + \mu a_2$	$b = \lambda b_1 + \mu b_2$	"	
$\underline{z} = \underline{z}_1\underline{z}_2$	peu adaptée		$r = r_1 r_2$	$\theta = \theta_1 + \theta_2$
$\underline{z} = \dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$			$r = \dfrac{r_1}{r_2}$	$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$\underline{z} = \underline{z}_1^{\alpha}\underline{z}_2^{\beta}$			$r = r_1^{\alpha} r_2^{\beta}$	$\theta = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2$

Applications à l'**électricité** :

$\boxed{\underline{X} = Xe^{j\varphi}}$ est l'*amplitude complexe* associée à la grandeur réelle $X\cos(\omega t + \varphi)$

Impédance complexe d'un dipôle :

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}}$$

avec :

$$R = Re(\underline{Z}) = Z\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad X = Im(\underline{Z}) = Z\sin\varphi$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

et :

$$\varphi = \arg\underline{Z} = \arctan\frac{X}{R} \qquad \underline{\text{si}} \qquad R > 0$$

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

d'où :

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}\right| = \frac{|\underline{v}_s|}{|\underline{v}_e|} = \frac{V_s}{V_e}$$

et :

$$\varphi = \arg\underline{H} = \arg\left(\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}\right) = \arg\underline{v}_s - \arg\underline{v}_e$$

NB En physique, il est très rare de multiplier par la quantité conjuguée "en haut et en bas" pour calculer un module ou un argument !