EQUATIONS DIFFERENTIELLES – Bilan

Equation différentielle du premier ordre

Forme canonique : $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y = cte}$ avec $\boldsymbol{\tau}$ constante de temps

Solution : $\boldsymbol{y(t) = SP + Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$

K déterminée à partir de la condition initiale, en général $y(0)$

Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique non amorti)

Forme canonique : $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = cte}$ avec $\boldsymbol{\omega_0}$ pulsation propre

Solution : $y(t) = SP + \ Y_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

Y_m et φ déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général *y(0)* et $\frac{dy}{dt}(0)$

ou

Solution : $\boldsymbol{y(t) = SP + A\cos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)}$

A et B déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général *y(0)* et $\frac{dy}{dt}(0)$

Equation différentielle du deuxième ordre (oscillateur harmonique amorti)

Formes canoniques :

$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte}$ avec ***Q*** facteur de qualité, $\boldsymbol{\omega_0}$ pulsation propre

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$ avec $\boldsymbol{\xi = \frac{1}{2Q}}$ facteur d'amortissement

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = cte$ avec $\boxed{\boldsymbol{\lambda = \xi\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q}}}$

Equation caractéristique :

$\boldsymbol{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0}$ Discriminant : $\Delta = \boldsymbol{{\omega_0}^2(\frac{1}{Q^2} - 4)}$ => 2 racines $\boldsymbol{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$

Facteur de qualité Q	Coefficient d'amortissement ξ	Discriminant Δ	Racines r_1 et r_2	Régime	Solution
Q < ½	$\xi > 1$	**$\Delta > 0$**	2 racines réelles négatives $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$	**Apériodique**	$\boldsymbol{y(t) = SP + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$
Q = ½	$\xi = 1$	**$\Delta = 0$**	1 racine double $r = -\omega_0$	**Critique**	$\boldsymbol{y(t) = SP + (At + B)e^{-\omega_0 t}}$
Q > ½	$\xi < 1$	**$\Delta < 0$**	2 racines complexes conjuguées $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} +/_- j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Ou $r_{1,2} = -\lambda +/_- j\omega$ $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0}^2 - \boldsymbol{\lambda}^2}$ $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$	**Pseudo-périodique**	$\boldsymbol{y(t) = SP + e^{-\lambda t}[Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)]}$

A et ***B*** déterminés à partir de 2 conditions initiales, en général ***y(0)*** et $\frac{dy}{dt}(\mathbf{0})$.

<u>**Décrément logarithmique**</u>

Dans le cas du régime pseudo-périodique :

$$\boldsymbol{\delta} = \ln\left[\frac{y(t) - y(\infty)}{y(t+T) - y(\infty)}\right] = ln\left[\frac{1}{e^{-\lambda T}}\right] = \boldsymbol{\lambda T} = \frac{\omega_0}{2Q}T$$

avec *y(t)* et *y(t+T)* valeurs de 2 « maxima » successifs