(187 pts)

DS 5

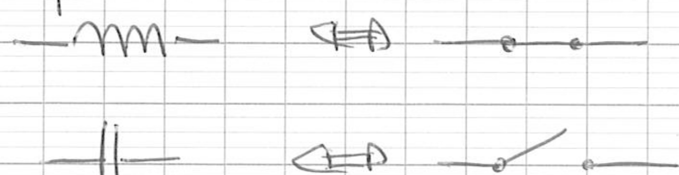
Problème 1 : Circuit du second ordre (72)

1) Interrupteur ouvert depuis longtemps
$\Rightarrow$ la bobine s'est démagnétisée dans la résistance
$\Rightarrow i_2(0^-) = 0$
Non-discontinuité du courant dans la bobine
1 $\Rightarrow \underline{i_2(0^+) = 0}$

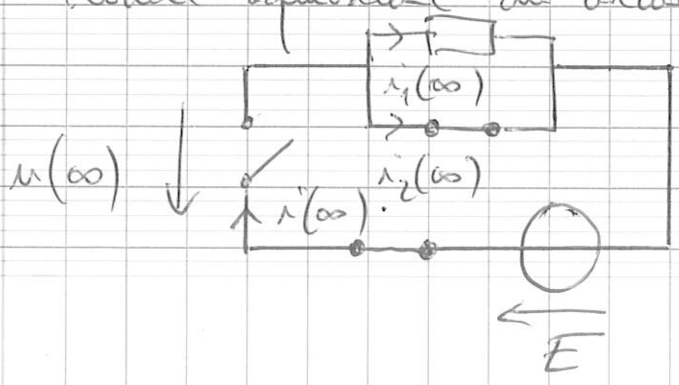
Condensateur déchargé ⊕ non discontinuité de la tension aux bornes du condensateur
(5) 1 $\Rightarrow \underline{u(0^+) = 0}$

D'où : à $t = 0^+$,
loi des mailles :
$E - u - u' = 0$
1 $\underline{u'(0^+) = E}$
1 1 $\Rightarrow \underline{i_1(0^+) = \frac{E}{R} = i(0^+)}$

2) Régime permanent atteint :



Modèle équivalent du circuit :



1 $\underline{i(\infty) = 0}$
(5) 1 $\underline{i_2(\infty) = 0}$
1 $\underline{i_1(\infty) = 0}$
1 $\underline{u'(\infty) = 0}$
1 $\underline{u(\infty) = E}$

3) Loi des mailles :

$$E - u - u' = 0$$

Loi des noeuds :

$$i = i_1 + i_2$$

Loi pour les dipôles :

$$i = C\frac{du}{dt} \qquad u' = L\frac{di_2}{dt} \qquad u' = Ri_1$$

$$u' = L\frac{di_2}{dt} = L\frac{d}{dt}(i - i_1)$$

$$= L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt} - \frac{u'}{R}\right)$$

$$= L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R} - \frac{E}{R}\right)$$

$$E - u = LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}}$$

Par identification à :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \dfrac{1}{RC} = \dfrac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \omega_0 RC \end{cases}$$

Pulsation propre

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Si $R \nearrow$, $Q \nearrow$ Facteur de qualité

Si $R \to \infty$, le circuit tend vers un oscillateur LC

4) Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = R_c\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

5 | 1 | 1 | 1 1 1

9

+2

1

1 (ω_0) 1 (nom)

1 (Q) (nom)

1 1

2 | 1 | 1

1 5) Evolution rapide du système.

2 | 1 6) $u(t) = (At+B)e^{-\omega_0 t} + SP$

| 1 (SP) $SP = E$

$u(t) = (At+B)e^{-\omega_0 t} + E$

Conditions initiales :

1 $u(0^+) = 0$

(CI) $i(0^+) = \frac{E}{R} = C\frac{du}{dt}(0^+)$

1 $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$

1 (B) $u(0) = B + E = 0 \Rightarrow \underline{B = -E}$

1 $\frac{du}{dt}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0(At+B)e^{-\omega_0 t}$

8

$\frac{du}{dt}(0) = A - \omega_0 B = \frac{E}{RC}$

1 (A) $A + \omega_0 B = \frac{E}{RC}$ $\quad A = \frac{E}{RC} - \omega_0 E$

$A = E\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = E\left(2\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$ (avec $R = R_C$)

$= E\left(2\frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{E}{\sqrt{LC}}$

$\underline{A = E\omega_0}$

d'où :

1 (sol) $\underline{u(t) = E(\omega_0 t - 1)e^{-\omega_0 t} + E}$

Page 5 ← 7)*

8) a) Courbe 1 :

1 $u(0^+) = 0$ OK

1 $u(\infty) = E \neq 0$ OK

1 Faible dépassement $\sim$ régime critique.

⑥ Courbe 2 :

1 $i(0^+) = \frac{E}{R} \neq 0$

1

1 $i(\infty) = 0$

$i = C\frac{du}{dt}$

(+) semble vérifié :

$t = 0,\ i > 0,\ \frac{du}{dt} > 0$

$t = t_0,\ i = 0,\ \frac{du}{dt} = 0$

b) Courbe 1 :

1 (E) $u(\infty) = \underline{E = 5V}$

Courbe 2 :

1 (i) $i(0^+) = \frac{E}{R} = 10^{-2}$ A.

⑥

1 (R) d'où : $\underline{R} = \frac{5}{10^{-2}} = \underline{500\ \Omega} = R_C$

Courbe 1 :

$t_0 = 20\ \mu s$ et $t_0 = \frac{2}{\omega_0}$

ou

$R_C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Méthode 1

$\Rightarrow R_C^2 = \frac{1}{4} \times \frac{L}{C}$

1 (L) $\Rightarrow L = 4R_C^2 C = 4 \times 500^2 \times 10.10^{-9}$

$= 4 \times 25 \times 10^4 \times 10.10^{-9}$

$= 100 \times 10 \times 10^{-5}$

1 (num) $= 10^3 \times 10^{-5} = \underline{10^{-2}\ H}$

9) a) En régime permanent : tous les courants sont nuls, seule la tension u est non nulle et égale à E

1

②

d'où :

1 $\text{Energie} = \frac{1}{2}CE^2 = \underline{\frac{CE^2}{2}}$

(1) * 7) $i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$

(2) $i(t) = EC(\omega_0)e^{-\omega_0 t} + EC(\omega_0 t - 1)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}$

$i(t) = ECe^{-\omega_0 t}(2\omega_0 - \omega_0^2 t)$

1 $\underline{i(t) = EC\omega_0(2 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$

9/b) Lorsque $u \nearrow$, $E_C = \frac{1}{2}Cu^2 \nearrow$

1 (2) $\Leftrightarrow$ le condensateur reçoit de l'énergie

$t \in [0, t_0]$

Lorsque $u \searrow$, $E_C \searrow$

1 $\Leftrightarrow$ le condensateur fournit de l'énergie

$t \in [t_0, \infty]$

1 9/c) $i_2(0^+) = 0 \Rightarrow E_L = \frac{1}{2}Li_2 = 0$

(2) 1 $i_2(\infty) = 0 \Rightarrow E_L = 0$

la bobine ne stocke globalement aucune énergie.

1 9/d) $E_G = \int_0^\infty E\, i(t).dt$ NE PAS CALCULER !

(2) $E_G = E\int_0^\infty i(t).dt$

$= EC\int_0^\infty \frac{du}{dt}dt$

1 $= EC[u]_0^\infty = \underline{CE^2}$

(2) 1 9/e) $E_R = E_G - E_C = CE^2 - \frac{CE^2}{2} = \frac{CE^2}{2}$

1

5

1°) a) On passe en régime pseudo-périodique

(1) $\Rightarrow Q \nearrow$

$\Rightarrow R \nearrow$

1 (δ) 1 b) $\delta = \ln\left(\dfrac{u(0) - u(\infty)}{u(1) - u(\infty)}\right) = \ln\left(\dfrac{8,7-5}{7-5}\right)$

$= \underline{0,61}$

(4)

2 1 (T) 1 $T = (0,9 - 0,3) \cdot 10^{-4} = 0,6 \cdot 10^{-4}$

$= \underline{60\ \mu s}$

Entre 2 "maxis"

1 c) $\delta = \dfrac{\omega_0}{2Q} T$

$\Rightarrow Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} T$

$Q = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \times \dfrac{1}{2\delta} \times T$

$= \dfrac{1}{\sqrt{10^{-2} \times 10^{-8}}} \times \dfrac{T}{2\delta}$

(4)

$= 10^5 \times \dfrac{60 \cdot 10^{-6}}{2 \times 0,} = ~~10^5 \times \dfrac{6 \cdot 10^{-5}}{2 \times 0,}~~$

1 $= \dfrac{6}{2 \times 0,61} \simeq \underline{5}$

Le coefficient Q pouvait être estimé avec le nombre de pseudo-périodes visibles.

1 $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \Rightarrow R = Q\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$R = 5\sqrt{\dfrac{10^{-2}}{10^{-8}}} = 5\sqrt{10^6} = 5 \cdot 10^3\ \Omega$

1 $= \underline{5\,k\Omega}$

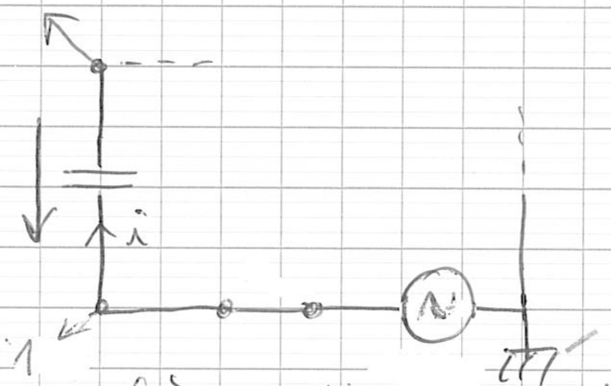
6

11)a) On fait varier la fréquence afin d'ajuster la période T_g.

On introduit une valeur moyenne $\left(\frac{E}{2}\right)$ en ajoutant un "DC offset".

On fait varier l'amplitude C-C 0-E en jouant sur le niveau d'amplitude.

11)b) Voie 2



Voie 1

On relève $e(t)$ en voie 1.

On relève $u(t)$ en réalisant l'opération MATH /Voie 1 ⊖ Voie 2

11)c) Il faut $\frac{T_g}{2} > 6T$

$$T_g > 12T$$

$$f_g < \frac{1}{12T}$$

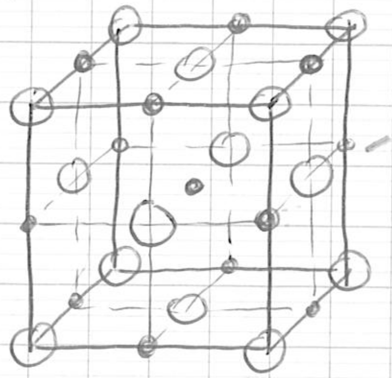
1300 Hz

(PT 2020) Problème 2 : Composés azotés (53 pts)

Partie 1

(CFC)

Q.21



○ Titane (Ti) N = 4

• Azote (N)

2

(4)

12 sites O :

1 au centre

1 12 sur chaque arête

1 $N_O = 1 + \frac{1}{4} \times 12 = 4$

1 Q22. $N_{Ti} = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$.

(3) 1 $N_O = 4$

1 $i = 6$ (6 PPV N pour chaque Ti et 6 PPV Ti pour chaque N)

1 Q23. $\rho = \dfrac{N_{Ti} \times M_{Ti} + N_N \times M_N}{a^3 \times N_a}$

1 $\rho = \dfrac{4 \times 48.10^{-3} + 4 \times 14.10^{-3}}{(425.10^{-12})^3 \times 6{,}0.10^{23}}$

(3) $\simeq \dfrac{\cancel{4} \times \cancel{60}^{10}.10^{-3}}{4^{\cancel{3}} \times 100^3 \times 10^{-36} \times \cancel{6} \times 10^{23}}$

$\simeq \dfrac{10^{-2}}{16 \times 10^6 \times 10^{-36} \times 10^{23}} \simeq \dfrac{1}{16} \times 10^5$

1 $\simeq \underline{6.10^3 \ kg.m^{-3}}$

(1) Q24. $\frac{a}{2} = R_{Ti} + R_N$ (Contact sur une demi-arête du cube).

Q25. Non contact sur la demi-diagonale du cube :

(1) $\frac{a}{\sqrt{2}} > 2R_{Ti}$ ou $R_{Ti} < \frac{a}{2\sqrt{2}}$

1 Q26. Titane pur $\Rightarrow$ $R_{Ti} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ $\Rightarrow a = 2\sqrt{2}\, R_{Ti}$ –

Taille du site O : R_O

Tangence sur 1 arête :

1 $2R_O + 2R_{Ti} = a$ –

(3) $\Leftrightarrow R_O = \dfrac{a}{2} - R_{Ti}$

1 $= \sqrt{2} R_{Ti} - R_{Ti} = (\sqrt{2} - 1) R_{Ti}$ –

Q27. $R_O = (\sqrt{2} - 1) \times 145 = 0{,}414 \times 145$

1 $\simeq 60$ pm –

(4) 1 $R_N = 65$ pm > 60 pm –

1 $\Rightarrow$ | Cristal de titane déformé –

1 | Non contact entre les atomes de Ti –

Modélisation d'un trampoline /87

1 1. $E_{p,élas}(z) = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2$ → ⚠

1 2. $E_{p,pes}(z) = mgz + cte$ → ⚠

1 3. $E_p(z) = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + mgz + cte$

CL :

3 1 $E_p(z = l_0) = \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 + mgl_0 + cte = 0$

$\Rightarrow cte = -mgl_0$

d'où : $E_p(z) = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + mgz - mgl_0$

1 $E_p(z) = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + mg(z - l_0)$

1 4. $\frac{dE_p}{dz} = k(z - l_0) + mg = 0$ → ⚠

$k(z - l_0) = -mg$

2 $z - l_0 = -\frac{mg}{k}$

1 $z = z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$

5. Homogénéité : $[z] = [l_0] = m$

1 $\left[\frac{mg}{k}\right] = \frac{N}{N.m^{-1}} = m$

2 Cohérence : $l_0 - \frac{mg}{k} \leq l_0$ OK.

1 Si $m \nearrow$ alors $z_{éq} \searrow$ OK

Si $k \nearrow$ alors $z_{éq} \nearrow$ OK.

6. Le système est soumis à 2 forces :

$\vec{P}$: force conservative

$F_{élas}$: force conservative

1 Le système est donc conservatif.

7. $E_m = E_c + E_p \quad \rightarrow \quad \triangle!$

$= \frac{1}{2} m v^2 + E_p$

$= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2 + mg(z - \ell_0)$.

Système conservatif $\Rightarrow$ Conservation de l'énergie mécanique.

1

1 $\quad \frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} + k\dot{z}(z-\ell_0) + mg\dot{z} = 0$

$\dot{z}(m\ddot{z} + kz - k\ell_0 + mg) = 0$

$\dot{z} = 0$ non pertinent

4 $\quad$ ou

$m\ddot{z} + kz - k\ell_0 + mg = 0$

1 $\quad$ Sous forme canonique

$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k\ell_0}{m} - g = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)$

$= \frac{k}{m} z_{éq}$

1 $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2 | 1 $\quad$ 8. $z(t=0) = z_{éq} - h$

1 $\quad \dot{z}(t=0) = 0$

1 $\quad$ 9. $z(t) = z_p + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

1 $\quad z_p = z_{éq}$

4 $\quad \dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

d'où : $z(0) = z_{éq} + A = z_{éq} - h$

1 $\quad \Rightarrow A = -h$

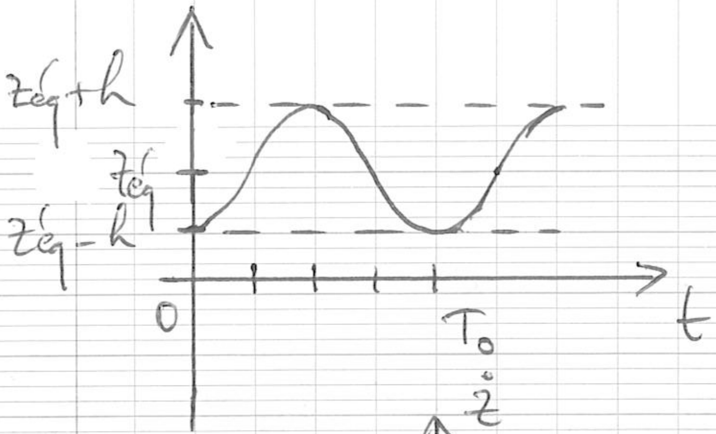
1 $\quad \dot{z}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

D'où : $\underline{z(t) = z_{éq} - h\cos(\omega_0 t)}$

1 $\quad$ 10. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

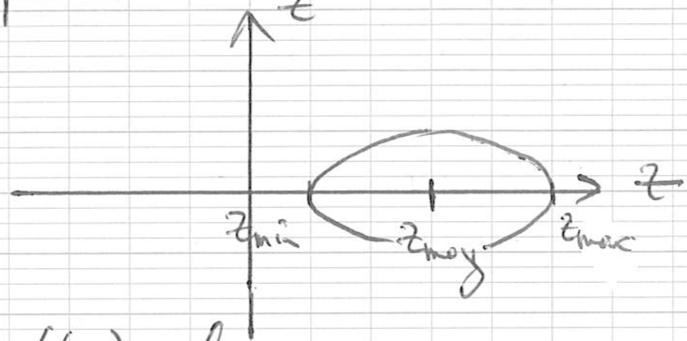
11.

3



12.

3



Ellipse

1 13. $z(t_1) = \ell_0$

$\Leftrightarrow z'_{\acute{e}q} - h\cos(\omega_0 t_1) = \ell_0$

$\Leftrightarrow \cancel{\ell_0} - \frac{mg}{k} - h\cos(\omega_0 t_1) = \cancel{\ell_0}$

14. $h\cos(\omega_0 t_1) = -\frac{mg}{k}$

1 $\cos(\omega_0 t_1) = -\frac{mg}{kh}$

Il faut $|\cos(\omega_0 t_1)| < 1$ donc $\frac{mg}{kh} < 1$
donc h suffisamment grand.

1 15. $\dot{z}(t) = h\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

1 16. $v_0 = \dot{z}(t_1) = h\omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$

d'où :

$v_0 = h\omega_0 \sin(\arccos(\cos\omega_0 t_1))$

1 $v_0 = h\omega_0 \sin\left(\arccos\left(\frac{mg}{kh}\right)\right)$

Or

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

3 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

En écrivant $\theta = \arccos(x)$.

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}$$
$$= \sqrt{1 - x^2}$$

1 On obtient :
$$v_0 = h\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{kh}\right)^2} = h\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{g}{h\omega_0^2}\right)^2}$$

⚠ ← 17. Référentiel : Terrestre (galiléen)
Système : athlète.
1 Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$.
3 | 1 PFD : $m\vec{g} = m\vec{a}$
$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{u_z} = -g \cdot \vec{u_z}$$
1 $$\underline{\ddot{z} = a = -g}$$ Mouvement uniformément accéléré.

⚠ ← 18. En intégrant par rapport au temps :
1 $$\dot{z} = -gt + cte$$
CI : $\dot{z}(0) = v_0 \Rightarrow cte = v_0$
1 d'où : $\dot{z} = -gt + v_0$

4 | En intégrant de nouveau par rapport au temps :
1 $$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + cte'$$
CI : $z(0) = \ell_0 \Rightarrow cte' = \ell_0$
d'où :
1 $$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \ell_0$$

1 19. Hauteur maximale : $\dot{z} = 0$

20. $\dot{z} = 0$
$$-gt_{MAX} + v_0 = 0$$
1 $$\underline{t_{MAX} = \frac{v_0}{g}}$$

3 | 1 $z_{max} = -\frac{1}{2} g t_{MAX}^2 + v_0 t_{MAX} + \ell_0$

$z_{max} = -\frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} + v_0 \frac{v_0}{g} + \ell_0$

1 $z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + \ell_0$

21. $E_m(z_{min}) = E_c(z_{min}) + E_p(z_{min})$

1 $= 0 + \frac{1}{2} k (z_{min} - \ell_0)^2 + mg(z_{min} - \ell_0)$

Avec : $z_{min} = z_{éq} - h$

$= \ell_0 - \frac{mg}{k} - h.$

On obtient :

$E_m(z_{min}) = \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} + h\right)^2 - mg\left(\frac{mg}{k} + h\right)$

$= \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} + h\right)^2 - \frac{m^2 g^2}{k} - mgh$

22. $E_m'(z_{MAX}) = E_c(z_{MAX}) + E_p(z_{MAX})$

$= 0 + mg(z_{MAX} - \ell_0)$

1 $E_m'(z_{MAX}) = mg(z_{MAX} - \ell_0)$

23. $E_m = E_m'$

d'où :

$\frac{1}{2} k (z_{min} - \ell_0)^2 + mg(z_{min} - \ell_0) = mg(z_{max} - \ell_0)$

$\frac{1}{2} k (z_{min} - \ell_0)^2 + mg z_{min} - \cancel{mg\ell_0} = mg z_{max} - \cancel{mg\ell_0}$

1 $\frac{1}{2} k (z_{min} - \ell_0)^2 + mg z_{min} = mg z_{MAX}$ (1)

4 | 1 24. Il faut $z_{min} > 0$

Cas limite : $z_{min} = 0$

1 En reportant dans (1) :

$$\frac{1}{2}k\ell_0^2 = mg\,z_{max}$$

$$k\ell_0^2 = 2mg\,z_{max}$$

1 $$k = \frac{2mg\,z_{max}}{\ell_0^2} = \frac{2\times 80\times 10\times(6+1)}{1^2}$$

1 $$\simeq 10.10^3\,N.m^{-1}$$

25. Th. de l'Énergie Mécanique :

1 $$\frac{dE_m}{dt} = P_{non\ cons}$$

En reprenant l'expression de E_m du 7. :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 + mg(z-\ell_0)$$

1 $$\frac{dE_m}{dt} = \dot{z}(m\ddot{z} + kz - k\ell_0 + mg) = -\alpha v^2 = -\alpha\dot{z}^2$$

5

En simplifiant par $\dot{z}$:

$$m\ddot{z} + kz - k\ell_0 + mg = -\alpha\dot{z}$$

ou $$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = 0 + k\ell_0 - mg$$

$$= k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) = k\,z_{éq}$$

ou

1 $$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{éq} \quad (II)$$

On identifie :

1 $$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \omega_0\frac{m}{\alpha} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$$

1 $$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2 (justifs) 26. $Z = z - z_{éq} \Rightarrow \dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$

3 En remplaçant dans (II) :

$$\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}(Z + z_{éq}) = \frac{k}{m}z_{éq}$$

1 $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$

ou $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$

1 27. Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$

Equation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

3 1 $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$

$\Rightarrow \frac{\cancel{\omega_0^2}}{Q^2} < 4\cancel{\omega_0^2}$

1 $\Rightarrow \frac{1}{Q^2} < 4 \Rightarrow \frac{1}{Q} < 2 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$

1 (τ en secondes)

28. $z(0) = \ell_0$

1 C'est à dire $Z(0) + z_{éq} = \ell_0$

ou $Z(0) + \cancel{\ell_0} - \frac{mg}{k} = \cancel{\ell_0}$

3 1 $Z(0) = \frac{mg}{k}$

1 $\dot{Z}(0) = \dot{z}(0) = v_0$

29. $Z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

$\dot{Z}(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

1 $+ e^{-\frac{t}{\tau}}(-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t)$

d'où :

5 | 1 $\quad Z(0) = A$

1 $\quad \dot{Z}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$

On identifie :

1
$$\begin{cases} Z(0) = Z_0 = A & \Rightarrow \underline{A = Z_0} \\ \dot{Z}(0) = v_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\Omega = v_0 + \frac{A}{\tau} = v_0 + \frac{Z_0}{\tau}$$

1
$$\Rightarrow \underline{B = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{Z_0}{\Omega\tau}}$$

2 | 30. $Z_\infty = \lim_{t\to\infty} Z(t)$

1 $\quad = \lim_{t\to\infty}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)\right) = 0$

1 $\quad Z_\infty = 0 \Leftrightarrow z_\infty = Z_\infty + z_{éq} = z_{éq}$

31. $Z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(Z_0\cos\Omega t + \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{Z_0}{\Omega\tau}\right)\sin\Omega t\right)$

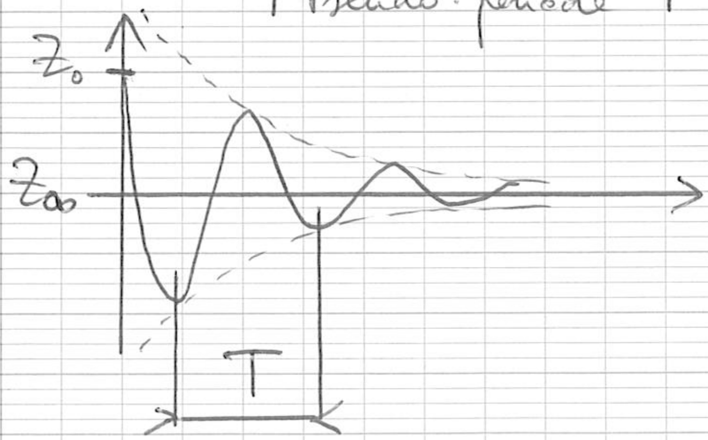
Régime pseudo-périodique, avec

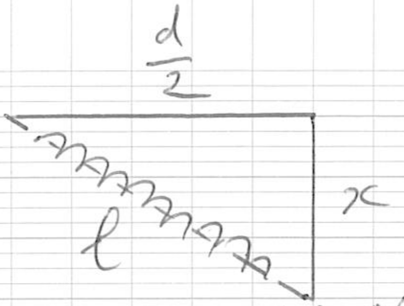
$Z(0) = Z_0$

$Z(\infty) = 0$

Pseudo-période T

3



32. 

1 $\ell^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2$

1 $E_{p,e} = 2 \times \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 = k(\ell - \ell_0)^2$

d'où :

1 $E_{p,e} = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - \ell_0\right)^2$

1 33. $E_{p,pes} = -mgx + cte$

(axe x orienté vers le bas).

34. D'où :

1 $E_p = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 - mgx + cte$

Avec

1 $E_p(0) = 0$

$E_p(0) = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0\right)^2 + cte$

$= k\left(\frac{d}{2} - \ell_0\right)^2 + cte = 0$

On obtient :

$cte = -k\left(\frac{d}{2} - \ell_0\right)^2$

C'est-à-dire :

1 $E_p(x) = k\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 - mgx - k\left(\frac{d}{2} - \ell_0\right)^2$

⚠ 1 35. $\frac{dE_p}{dx} = 0$ pour $x = 0{,}27$ m (graphiquement)

Position stable car il s'agit d'un

1 <u>minimum</u> d'énergie potentielle.

1 36. $x_{éq1} = \frac{mg}{k}$

1 A.N. $x_{éq1} = \frac{80 \times 10}{4.10^3} = 0{,}20$ m $= 20$ cm

On a donc :

1 $x_{éq2} = 0{,}27$ m $> x_{éq1} = 0{,}20$ m