DEVOIR SURVEILLE N°5

Durée de l'épreuve : 4 H

L'usage de la calculatrice est interdit.

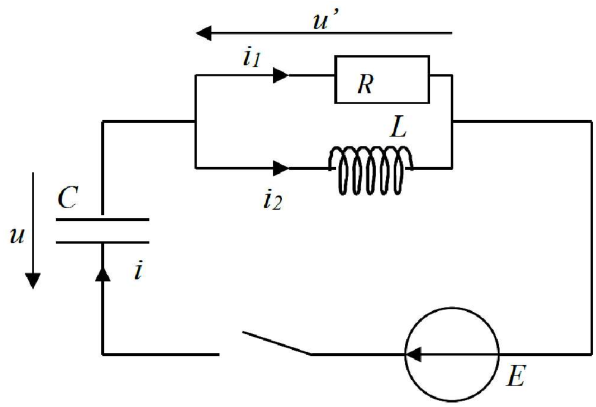
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**.

Ce DS peut vous sembler long. Il ne s'agit pas d'essayer de le finir mais de gérer au mieux votre temps.

<u>Les candidats sont invités à souligner ou encadrer les résultats de leurs calculs</u>.

PROBLEME N°1 : CIRCUIT DU SECOND ORDRE EN REGIME TRANSITOIRE (ENVIRON 35 % DU BAREME)

De nombreuses questions de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante les unes des autres.



Initialement dans le circuit ci-contre, l'interrupteur est ouvert depuis longtemps et le condensateur de capacité ***C* = 10 nF** est déchargé.

Le générateur idéal de tension délivre une tension continue *E* de valeur positive.

A un instant considéré comme origine des temps, on ferme l'interrupteur,

1) Déterminer les valeurs prises par u, u', i_1, i_2 et i, juste après la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
2) Déterminer les valeurs prises par u, u', i_1, i_2 et i, quand le nouveau régime permanent est atteint (t infini).
3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par u. La présenter sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E$$

   On justifiera notamment $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $= R\sqrt{\frac{C}{L}}$. Comment nomme-t-on ces coefficients ?

   Commenter l'évolution de Q par rapport à R.
4) Déterminer l'expression de R en fonction de L et C, correspondant au régime critique.

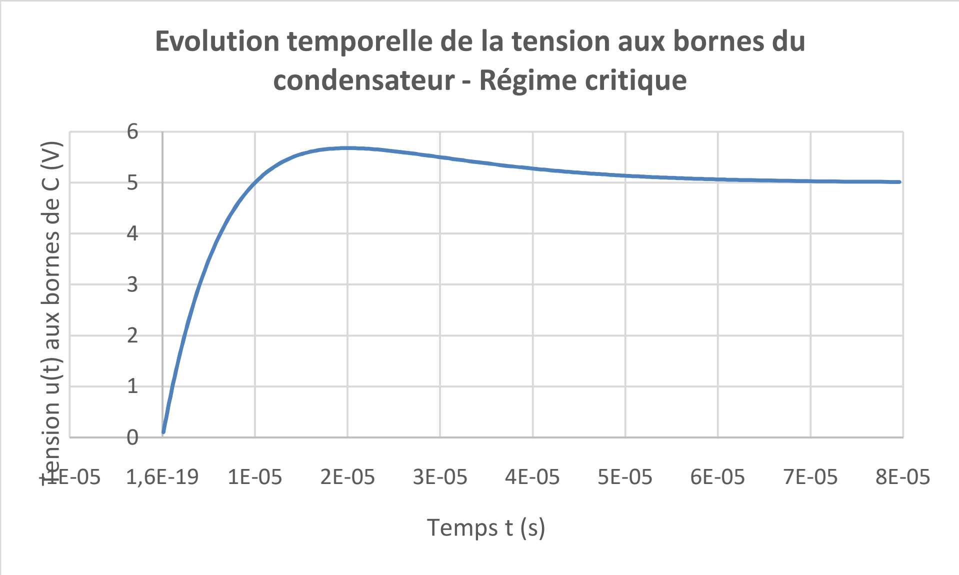
On suppose maintenant que *R* est telle que le régime soit critique.

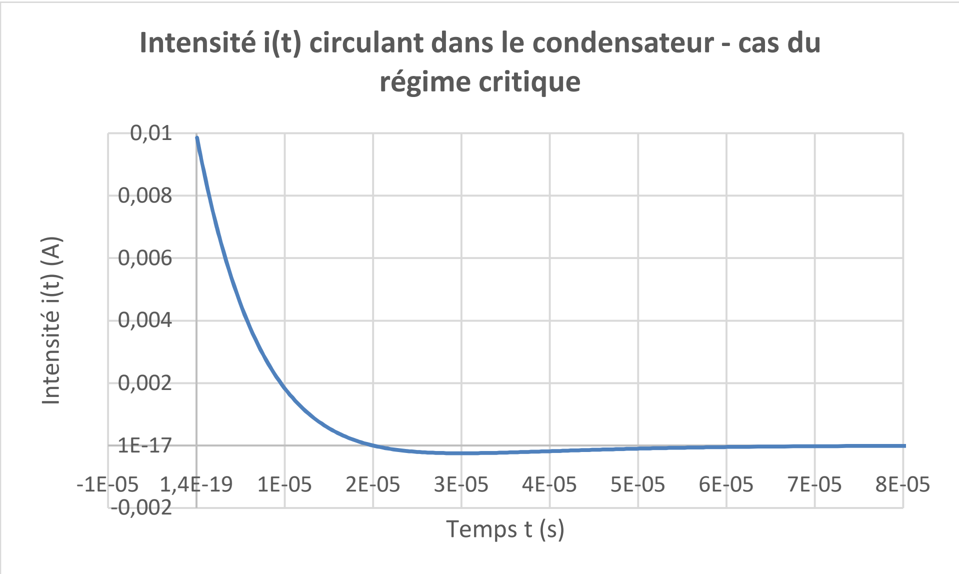
5) Quel est l'intérêt de ce régime ?
6) Résoudre alors l'équation différentielle précédente et montrer que la tension $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) = E(\omega_0 t - 1)e^{-\omega_0 t} + E$$

7) En déduire la loi i(t).

8) Ci-dessous sont fournies les courbes représentant l'évolution de u (courbe 1) et celle de i (courbe 2) au cours du temps **lorsque le régime est critique**. Le maximum de la courbe 1 se situe précisément en $t = t_0 = 2/\omega_0 = 20$ µs.





a) Justifier l'allure de ces courbes.

b) Déduire des courbes 1 et 2 les valeurs de E, L et R.

9) Etude énergétique du régime critique

a) Quelle énergie est stockée dans le circuit en régime permanent ?

b) En s'aidant des courbes précédentes, caractériser le comportement énergétique du condensateur sur les intervalles de temps [0 ; t_0] et [t_0 ; infini].

c) Justifier que la bobine ne stocke globalement aucune énergie lors de cette phase de régime transitoire.

d) Déterminer l'énergie délivrée par le générateur tout au long de l'évolution.

e) En déduire l'énergie reçue par la résistance.

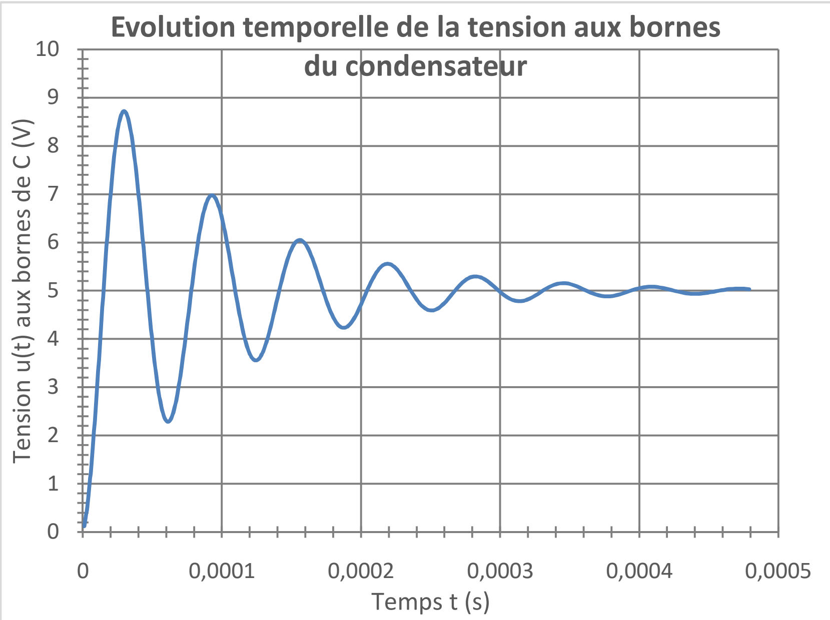
10) Changement de régime

En modifiant la valeur de R, on obtient la courbe ci-dessous : évolution temporelle de u en fonction de t.

a) Cette évolution est-elle obtenue en augmentant ou en diminuant R ? Justifier.

b) Mesurer la valeur du décrément logarithmique δ et celle de la pseudo-période T. On donne : $\ln\left(\frac{3{,}7}{2}\right) = 0{,}61$.

c) En déduire la valeur de Q puis celle de R.



11) Aspect expérimental

Le générateur délivre maintenant un signal carré $e(t)$ de période T_G, de valeur mini 0 V et de valeur maxi E précédemment déterminée.

a) Expliquer comment obtenir ce signal à l'aide des différentes commandes du générateur.

b) On désire observer à l'oscilloscope la tension délivrée par le générateur et la tension aux bornes du condensateur. Expliquer les différents branchements et réglages.

c) Indiquer comment choisir une fréquence permettant d'observer à la fois le régime transitoire pseudopériodique et le régime permanent.

PROBLEME N°2 : LE NITRURE DE TITANE (ENVIRON 15 % DU BAREME)

- Questions Q.21 à Q.27

Données à 25°C :

Paramètre de la maille du nitrure de titane a = 425 pm
Constante d'Avogadro Na = $6,0.10^{23}$ mol^{-1}
r(Ti) = 145 pm
$\sqrt{2}-1=0{,}414$

Masse molaire du cuivre = 63,5 g. mol^{-1}
Masse molaire du titane = 48,0 g. mol^{-1}
Masse molaire de l'azote = 14,0 g. mol^{-1}
Masse molaire de NO_3^- = 62,0 g. mol^{-1}

Le nitrure de titane présente une dureté dépassant celle de la plupart des matériaux métallique et a une température de fusion très élevée (environ 3000°C). Ces remarquables propriétés physiques sont contrebalancées par sa fragilité, ce qui conduit à l'employer principalement comme film de revêtement. Ce composé présente une structure cristalline dans laquelle les atomes de titane forment un réseau cubique à face centrée, les atomes d'azote occupant tous les sites interstitiels octaédriques de la structure.

Q.21 Représenter en perspective la maille du réseau métallique. Vous indiquerez et décrirez précisément la localisation et le nombre de sites octaédriques.

Q.22 Déterminer le nombre de motifs par maille, ainsi que la coordinence du titane et de l'azote

Q.23 Donner un ordre de grandeur de la masse volumique du nitrure de titane.

Q.24 Ecrire la relation de tangence entre le métal et l'azote.

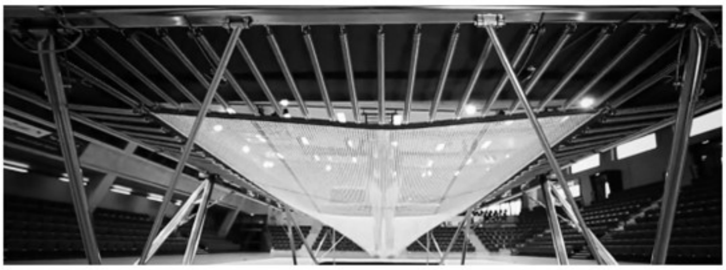
Q.25 En considérant que les atomes de titane ne doivent pas être tangents, donner l'inégalité vérifiée par le rayon r_{Ti} des atomes métalliques.

Q.26 Indiquer la relation entre la taille du site octaédrique et r_{Ti} le rayon de l'atome métallique dans une maille cubique à face centrée de titane pur de paramètre de maille a.

Q.27 Le rayon de l'atome d'azote est de 65 pm. Que pouvez-vous en conclure ?

<u>Probleme N°3: Modelisation d'un trampoline</u> (environ 50 % du bareme)

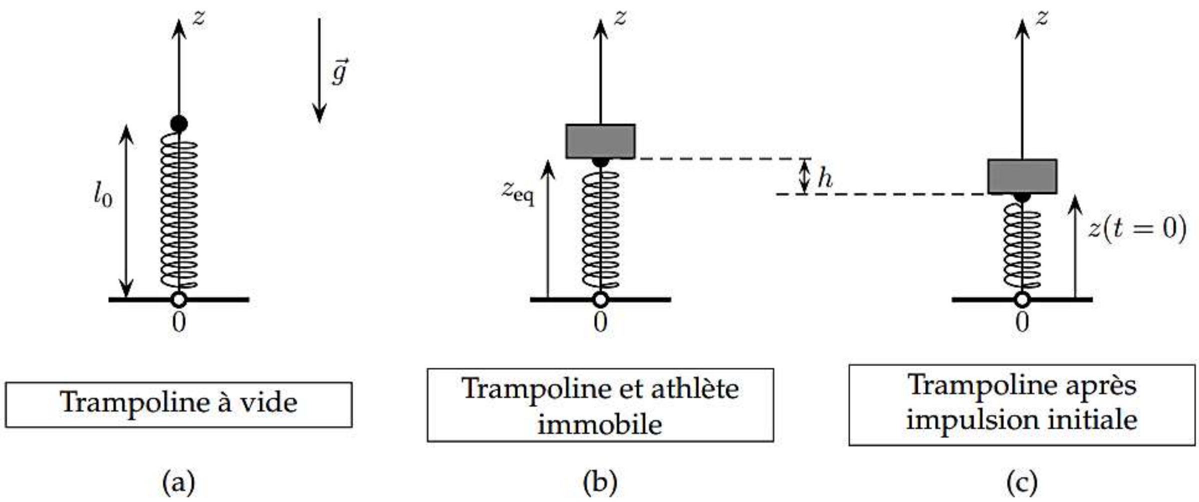
Ce problème propose une modélisation un peu simpliste du mouvement d'un trampoliniste (athlète faisant du trampoline, aussi parfois simplement appelé gymnaste). Un trampoline est constitué d'une toile élastique, de masse négligeable, elle-même tendue de chaque côté par des ressorts.




La modélisation à 3 dimensions n'étant pas aisée, on adopte ici une modélisation 1D nettement plus simple. Le trampoline sera modélisé par un seul ressort ne pouvant se déplacer que de façon verticale. La constante de raideur du ressort sera notée k et sa longueur à vide ℓ_0. On note m la masse de l'athlète, assimilable à un point matériel, et $z(t)$ son altitude par rapport au sol où est attaché le ressort (origine au sol, axe dirigé vers le haut).

L'accélération de la pesanteur est notée g et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

On néglige tout frottement dans les parties A à D.



<u>Figure 1</u> – Trampoline avec un ressort dans différentes configurations

A - <u>Étude préliminaire</u>

On choisit le trampoline à vide comme référence pour l'énergie potentielle totale.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,élas}(z)$ lorsque l'athlète est à une altitude $z(t) < \ell_0$, c'est-à-dire lorsque l'athlète est en contact avec le trampoline. Pour la suite, pour une altitude $z(t) > \ell_0$ (quand l'athlète n'est en contact avec le trampoline), on considère que l'énergie potentielle élastique est nulle.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,pes}(z)$ lorsque l'athlète est à une altitude $z(t)$.

3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(z)$ du point matériel en fonction de z, ℓ_0, k, m et g.

4. Déterminer la longueur z_{eq} du ressort à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque l'athlète se tient immobile sur le trampoline (figure 1 (b)), en fonction de m, g, k et ℓ_0.

5. Vérifier l'homogénéité et la cohérence de l'expression de z_{eq} trouvée à la question précédente.

B - Impulsion initiale et mouvement ultérieur

À $t = 0$, l'athlète fléchit les jambes puis les tend brusquement. Cela a pour effet d'enfoncer le trampoline d'une hauteur h par rapport à la position d'équilibre (figure 1 (c)). On considère que la vitesse de l'athlète reste nulle à cet instant où la compression est maximale.

6. Le système est-il conservatif ? Justifier.

7. À l'aide d'une étude énergétique, établir l'équation différentielle $(\mathbf{I})$ du mouvement et la mettre sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, z_{eq} \qquad (\mathbf{I})$$

où l'on précisera l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 en fonction des données du problème.

8. Donner les conditions initiales $z(t = 0)$ et $\dot{z}(t = 0)$.

9. Résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{I})$ obtenue. On exprimera $z(t)$ en fonction de z_{eq}, h, ω_0 et t.

10. Donner l'expression de la période propre T_0 du mouvement en fonction des données du problème.

11. Tracer l'allure de la courbe $z(t)$ en représentant T_0, z_{eq} et h.

La question 12 a été supprimée.

Si l'athlète a poussé suffisamment fort, lorsqu'il arrivera à $z(t) = \ell_0$, il décollera du trampoline pour décrire une chute libre jusqu'au moment où il retombera sur le trampoline. On déterminera dans les parties suivantes l'altitude atteinte par l'athlète. Il nous faut pour cela tout d'abord trouver la vitesse lorsqu'il décolle, ce qui est le but des prochaines questions.

13. On note t_1 le temps auquel l'athlète atteint la position où il décolle. Donner l'expression de la relation vérifiée par t_1 (attention : il n'est pas demandé pour le moment de la résoudre).

14. Déterminer l'expression de $\cos(\omega_0 t_1)$ en fonction de m, g ,k et h. Comment voit-on mathématiquement qu'il est nécessaire que l'athlète ait poussé suffisamment fort pour pouvoir décoller ?

15. En utilisant la solution de l'équation différentielle, déterminer l'expression de $\dot{z}(t)$ (l'athlète est toujours en contact avec le trampoline).

16. Déterminer l'expression de $v_0 = \dot{z}(t_1)$ la vitesse de l'athlète lorsqu'il quitte le trampoline, en fonction de h, ω_0 et g. On admettra pour cette question que l'athlète a poussé suffisamment fort. On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme suivante :

$$v_0 = h\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{g}{h\omega_0^2}\right)^2}.$$

C – <u>Mouvement aérien</u>

L'athlète a maintenant décollé du trampoline et peut donc réaliser des figures.

On s'intéresse à la hauteur maximale qu'il peut atteindre en fonction de v_0. On choisit la nouvelle origine des temps $t = 0$ au moment où l'athlète décolle avec $z(t = 0) = \ell_0$.

17. Etablir l'expression de l'accélération $a(t) = \ddot{z}(t)$ de l'athlète. Caractériser le mouvement.

18. Déterminer l'expression des fonctions $\dot{z}(t)$ et $z(t)$ en fonction des données du problème.

19. Comment peut se traduire simplement en équation le fait que l'athlète atteint la hauteur maximale ?

20. En déduire t_{MAX} la durée au bout de laquelle l'athlète atteint la hauteur maximale et z_{MAX} sa hauteur maximale en fonction de v_0, g et ℓ_0.

D – <u>Détermination de la constante de raideur du ressort</u>

On choisit le trampoline à vide comme référence pour l'énergie potentielle totale.

21. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(z_{min})$ juste après l'impulsion initiale (voir figure 1 (c) à compression maximale) en fonction de z_{min} et des données de l'énoncé.

22. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E'_m(z_{MAX})$ lorsque l'athlète est au sommet de sa trajectoire en fonction de z_{MAX} et des données de l'énoncé.

23. On suppose que l'énergie mécanique se conserve même si les interactions ont changé. En déduire la relation entre z_{MAX} et z_{min} (on ne cherchera pas à simplifier l'expression obtenue).

*La question **24** est peu guidée et nécessite de l'autonomie pour la résolution*

24. La hauteur de saut souhaitée est de $6\ m$, on estime ℓ_0 à $1\ m$ et la masse du gymnaste à $80\ kg$. Estimer la valeur minimale k pour que ce dernier ne touche pas le sol lors de son mouvement.

E – Atterrissage

L'athlète redescend et reprend contact avec le trampoline pour ensuite s'arrêter. Pour diminuer le nombre d'oscillations, il écarte les bras introduisant ainsi un frottement fluide avec l'air dont la puissance est donnée par $P = -\alpha v^2$ où v représente la vitesse verticale de l'athlète et α un coefficient positif appelé coefficient de frottement fluide.

On choisit la nouvelle origine des temps $t = 0$ au moment où l'athlète touche le trampoline avec $z(t = 0) = \ell_0$ et $\dot{z}(t = 0) = v_0$.

25. À l'aide d'une étude énergétique, montrer que l'équation différentielle $(\mathbf{II})$ vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps s'écrit :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, z_{eq} \qquad (\mathbf{II})$$

L'oscillateur est donc caractérisé par le couple (Q, ω_0) dont on déterminera l'expression en fonction de k, α, m.

26. On pose $Z = z - z_{eq}$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.

On se place dans le cas du régime pseudo-périodique. Les solutions sont de la forme :

$$Z(t) = e^{-t/\tau}(A\ cos\ \Omega t + \ B\ sin\ \Omega t)$$

27. Déterminer la condition sur Q pour être dans un tel régime.

28. Sachant que $z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ et en utilisant les conditions initiales $z(t = 0)$ et $\dot{z}(t = 0)$, déterminer les conditions initiales $Z_0 = Z(t = 0)$ et $\dot{Z}(t = 0)$.

29. En déduire les expressions de A et B en fonction de Z_0, v_0, Ω et τ.

30. Déterminer l'expression de $Z_\infty = \lim_{t\to\infty} Z(t)$. A quelle position correspond Z_∞ ?

31. Tracer l'allure de $Z(t)$ en faisant apparaitre les grandeurs suivantes : T (pseudo-période) et Z_0.

F – Trampoline avec deux ressorts

On cherche un modèle plus proche de la réalité. Pour cela on modifie la modélisation du trampoline à l'aide de deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de raideur identique k.

L'athlète, toujours assimilé à un point matériel M de masse m monte sur le trampoline qui s'enfonce. Le repérage de l'athlète est alors modifié : sa position est repérée par $x(t)$ son enfoncement par rapport à la droite AB supposée fixe, l'axe (Ox) est dirigé vers le bas (figure 3).

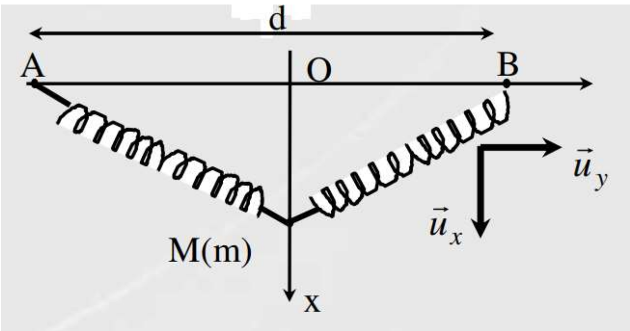


Figure 3 – Trampoline avec deux ressorts

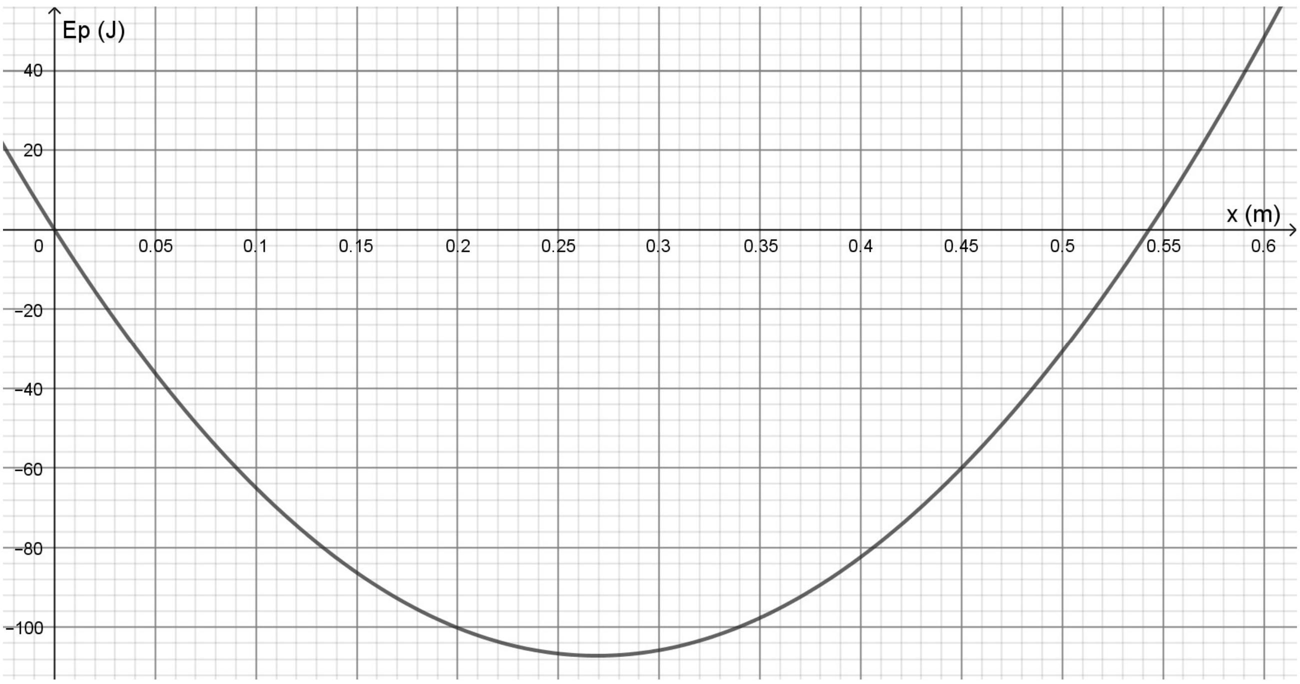
On choisit la droite AB comme référence pour l'énergie potentielle totale.

32. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,élas}(x)$ lorsque l'athlète est à une position $x(t)$, c'est-à-dire lorsque l'athlète est en contact avec le trampoline.

33. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,pes}(x)$ lorsque l'athlète est à une position $x(t)$.

34. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ du point matériel en fonction de x, d, ℓ_0, k, m et g.

En prenant les valeurs numériques suivantes : $k = 4\ kN.m^{-1}, \ell_0 = 1\ m,\ \ g = 10\ m.s^{-2}, m = 80\ kg$ et $d = 4\ m$, on obtient le tracé suivant pour la fonction $E_p(x)$:



35. Déterminer la valeur de la position d'équilibre stable $x_{eq\,2}$ de l'athlète dans le cas d'un trampoline avec deux ressorts. Justifier.

36. Sachant que dans le cas d'un seul ressort, on a obtenu $z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$, déterminer l'expression de de $x_{eq\,1}$ de l'athlète dans le cas d'un trampoline avec un ressort. Faire l'application numérique de $x_{eq\,1}$ dans le cas des valeurs numérique suivantes : $k = 4\,kN.m^{-1}, \ell_0 = 1\,m,\ g = 10\,m.s^{-2}, m = 80\,kg$.

Comparer les enfoncements de l'athlète à l'équilibre, $x_{eq\,1}$ et $x_{eq\,2}$, dans les deux modélisations du trampoline.