

Exercice 6

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{1}{\tau} e$$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_m e^{j\varphi} \\ \underline{e} &= E_m e^{j(\omega t + \varphi)} \\ e &= E_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{SP: } \begin{cases} u = U_m \cos(\omega t + \varphi') \\ \underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi')} \\ \underline{U} = U_m e^{j\varphi'} \end{cases}$$

$$1. \quad j\omega \underline{U} + \frac{1}{\tau} \underline{U} = \frac{1}{\tau} \underline{E}$$

$$2. \quad \underline{E} - \underline{U}_R - \underline{U} = 0$$

$$\underline{E} - R\underline{I} - \underline{U} = 0$$

$$\underline{E} - RjC\omega \underline{U} - \underline{U} = 0$$

$$3) \quad \underline{U} (1 + jRC\omega) = \underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{(ou)} \quad \underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + j\tau\omega}$$

$$4) \quad U_R = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\text{Arg}(\underline{U}) = \arg\left(\frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega}\right)$$

$$\varphi' = \varphi - \arctan(RC\omega)$$

$$\text{(ou)} \quad \varphi' = \varphi - \arctan(\tau\omega)$$

$$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$$

$$\underline{I} = jC\omega \underline{U}$$

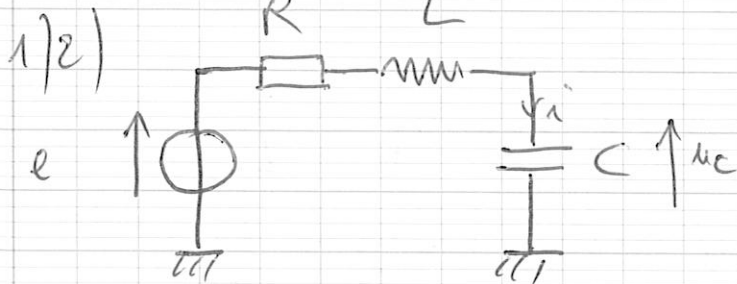
En dérivant par $\tau = RC$:

$$\frac{\underline{E}}{RC} - j\omega \underline{U} - \frac{\underline{U}}{RC} = 0$$

$$j\omega \underline{U} + \frac{1}{\tau} \underline{U} = \frac{1}{\tau} \underline{E}$$

(résultat précédent)

Exercice 7 UR $\leftarrow \frac{u_L}{L}$



$$e - u_R - u_L - u_C = 0 \quad (1)$$

avec : $u_R = Ri$ $q = Cu_C$
 $u_L = L \frac{di}{dt}$ $i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{dq}{dt}$

$$(1) \Rightarrow e - R \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{e}{L}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{e}{L}$$

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e}{L} \quad \text{Forme canonique.}$$

Identification :

$$\begin{cases} \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} & Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \frac{1}{LC} = \omega_0^2 & \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

* Résolution avec les impédances complexes

3)

R	\Leftrightarrow	h
L	\Leftrightarrow	m
C	\Leftrightarrow	$\frac{1}{R}$

On obtient :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$

Impédance élec = $\underline{Z} = \frac{u}{i}$

Impédance méca = $\frac{F}{v}$

$$4) \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e}{L}$$

Passage en complexes :

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e}{L}$$

$$-\omega^2 q + \frac{\omega_0 i \omega}{Q} q + \omega_0^2 q = \frac{E_M}{L} e^{i\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) q = \frac{E_M}{L} e^{i\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) q_M e^{i\omega t} = \frac{E_M}{L} e^{i\omega t}$$

$$q_M = \frac{\frac{E_M}{L}}{-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\left(\frac{E_M}{L} = E_M\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{d}{dt}(q) = i\omega q$$

On obtient :

$$\underline{I}_M = i\omega q_M$$

$$\underline{I}_M = \frac{i\omega \frac{E_M}{L}}{-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (\div i\omega)$$

$$= \frac{\frac{E_M}{L}}{-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (\div \omega_0)$$

$$= \frac{\frac{E_M}{L\omega_0}}{i\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{Q} - i\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$= \frac{\frac{E_M}{L\omega_0}}{\frac{1}{Q} + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Amplitude
Complexe
Associe
à l'intensité

Identification
à la
forme

$$\underline{V}_M(u) = \frac{\omega_0 X_0}{\frac{1}{Q} + i\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

$$\underline{I}_M(u)$$

$$\left(u = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$I_H = |I_H| = \frac{\frac{E_H}{L\omega_0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (2)$$

I_H max pour $\omega = \omega_0$ pulsation de résonance / $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$
fréquence de résonance

$$I_{H \text{ max}} = \frac{\frac{E_H}{L\omega_0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2}} = \frac{E_H}{L\omega_0} \times Q$$

$$= \frac{E_H}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L} \times \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{E_H}{L} \times \sqrt{LC} \times \frac{1}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$I_{H \text{ max}} = \frac{E_H}{R} \times \text{(CQFD)}$$

Amplitude à la résonance

5) Difficile!

On cherche les 2 valeurs de ω pour lesquelles.

$$\frac{I_H}{I_{H \text{ max}}} = \frac{E_H}{\sqrt{2}} = \frac{E_H}{\sqrt{2} R}$$

ou $\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{2}$ (dénominateur de (2) égal à $\sqrt{2}$ au lieu de 1 à la résonance -

Il faut:

$$\left(\frac{1}{Q}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

$$\pm \frac{1}{Q} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad \left. \begin{array}{l} \times \omega \\ \times \omega_0 \end{array} \right\}$$

$$\pm \frac{1}{Q} \omega = \frac{\omega^2}{\omega_0} - \omega_0$$

$$\pm \frac{1}{Q} \omega_0 \omega = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$\omega^2 \pm \frac{1}{Q} \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 + 4\omega_0^2$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Les 2 ω positives sont:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Largeur de la bande passante:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

largeur de la Bande Passante
associé à la résonance
(en pulsations ω).

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (\text{en fréquences } f)$$

(*) Exercice 7 : Résolution avec les impédances complexes

Loi des mailles :

$$\underline{E} - \underline{U}_R - \underline{U}_L - \underline{U}_C = 0 \quad (1)$$

avec :

$$\underline{U}_R = R \underline{I}$$

$$\underline{U}_L = jL\omega \underline{I}$$

$$\underline{Q} = C \cdot \underline{U}_C \rightarrow \underline{U}_C = \frac{\underline{Q}}{C}$$

$$\underline{I} = jC\omega \underline{U}_C$$

(1) devient :

$$\underline{E} - R \underline{I} - jL\omega \underline{I} - \underline{U}_C = 0$$

$$\underline{E} - jRC\omega \underline{U}_C - jL\omega \times jC\omega \underline{U}_C - \underline{U}_C = 0$$

$$\underline{E} - jRC\omega \frac{\underline{Q}}{C} + LC\omega^2 \frac{\underline{Q}}{C} - \frac{\underline{Q}}{C} = 0$$

$$\underline{E} - \underline{Q} \left(jR\omega - L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) = 0$$

$$\underline{E} = \underline{Q} \left(jR\omega - L\omega^2 + \frac{1}{C} \right)$$

$$\underline{Q} = \frac{\underline{E}}{jR\omega - L\omega^2 + \frac{1}{C}}$$

** identification =

Précédemment nous avons obtenu :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{e}{L}$$

Passage en complexes :

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \underline{q} \\ \dot{q} &\rightarrow j\omega \underline{q} \\ \ddot{q} &\rightarrow -\omega^2 \underline{q} \end{aligned}$$

On obtient :

$$-\omega^2 \underline{q} + \frac{R}{L} j\omega \underline{q} + \frac{1}{LC} \underline{q} = \frac{e}{L}$$

$$q \left(-\omega^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC} \right) = \frac{e}{L}$$

$$q = \frac{\frac{e}{L}}{-\omega^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC}} \quad (\times L)$$

$$q = \frac{e}{-L\omega^2 + Rj\omega + \frac{1}{C}}$$

(**) Identification

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= E_M \cos(\omega t) \\ \underline{e}(t) &= \underline{E}_M e^{j\omega t} \\ &= \underline{E} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_M$$

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= Q_M \cos(\omega t + \varphi) \\ \underline{q}(t) &= \underline{Q}_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= \underline{Q}_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} \\ &= \underline{Q} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{Q}_M = \frac{\underline{E}_M}{jR\omega - L\omega^2 + \frac{1}{C}}$$

→ constante réelle
→ constante réelle

Terme imaginaire en ω

Terme réel en ω^2

(XC) au Numérateur et au Dénominateur

On identifie à :

$$\underline{Q}_M = \frac{A}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

→ Constante réelle
(1) (cours p.12)

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Constante réelle = 1
Terme réel en ω^2
Terme imaginaire en ω

$$\underline{Q}_M = \frac{CE_M}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \quad (2)$$

On identifie (1) et (2) :

$$\begin{cases} A = CE_M \\ jRC\omega = j \frac{x}{Q} = j \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow RC = \frac{1}{Q\omega_0} \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (4) \end{cases}$$

On obtient :

$$(4) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(3) \quad Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(*) (*) (*) Identification → Terme imaginaire pur

$$\underline{I_M} = \frac{j\omega \frac{EM}{L}}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Terme réel en ω^2 Terme imaginaire en ω Terme réel

On identifie à :

(Cours p.12)

$$\underline{I_M} = \frac{B}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad (1) \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Terme réel = 1 Terme imaginaire en ω Terme réel. en $\frac{1}{\omega}$

÷ $(j\omega \frac{\omega_0}{Q})$
au Num
et Dénom

ou $\underline{I_M} = \frac{B}{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0} - jQ \frac{\omega_0}{\omega}}$

$$\underline{I_M} = \frac{\frac{EM}{L} \times \frac{Q}{\omega_0}}{j \frac{\omega}{\omega_0} Q + 1 - jQ \frac{\omega_0}{\omega}}$$

Exercice 13 : Accélérométrie d'un stabilisateur d'images

1. 2.

BASE :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z \quad \text{Poids}$$

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_z \quad \text{Force de rappel élastique}$$

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\vec{u}_z$$

PA :

$$\sum \vec{F}' = m\vec{a}_{M/R_T}$$

$$mg\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z - \alpha\dot{z}\vec{u}_z = m\vec{a}_{M/R_T}$$

$$= m(\ddot{z} + \ddot{z}_0)\vec{u}_z$$

Justification :

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$$

En dérivant :

$$\vec{v}_{M/R_T} = \vec{v}_{O/R_T} + \vec{v}_{M/R_{app}}$$

1.

En dérivant :

$$\vec{a}_{M/R_T} = \vec{a}_{O/R_T} + \vec{a}_{M/R_{app}}$$

$$= (\ddot{z}_0 + \ddot{z})\vec{u}_z$$

On obtient sur \vec{u}_z :

$$mg - k(z - l_0) - \alpha\dot{z} = m\ddot{z} + m\ddot{z}_0$$

$$mg + kl_0 - m\ddot{z}_0 = m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz$$

En divisant par m :

$$g + \frac{k}{m}l_0 - \ddot{z}_0 = \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z$$

(ou)

$$\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} + l_0\right) - \ddot{z}_0 = \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z$$

z_{eq}

Avec :

$$\begin{cases} z_0(t) = z_0 \cos \omega t \\ \dot{z}_0(t) = -\omega z_0 \sin \omega t \\ \ddot{z}_0(t) = -\omega^2 z_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \underline{z} + z_{eq} \\ \dot{z} = \dot{\underline{z}} + 0 \\ \ddot{z} = \ddot{\underline{z}} + 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{k}{m} z_{eq} + \omega^2 z_0 \cos(\omega t) = \ddot{\underline{z}} + \frac{\alpha}{m} \dot{\underline{z}} + \frac{k}{m} \underline{z}$$

(on)

$$\cancel{\frac{k}{m} z_{eq}} + \omega^2 z_0 \cos(\omega t) = \ddot{\underline{z}} + \frac{\alpha}{m} \dot{\underline{z}} + \frac{k}{m} \underline{z} + \cancel{\frac{k}{m} z_{eq}}$$

$$\omega^2 z_0 \cos(\omega t) = \ddot{\underline{z}} + \frac{\alpha}{m} \dot{\underline{z}} + \frac{k}{m} \underline{z}$$

$\omega_0 =$ Pulsation propre

$Q =$ facteur de qualité

On identifie :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \omega_0 \frac{m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{mk}$$

$$3. \quad \omega^2 \underline{z}_0 = -\omega^2 \underline{z}_m + i \omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{z}_m + \omega_0^2 \underline{z}_m$$

$$\underline{z}_0 \cdot \omega^2 = \underline{z}_m \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)$$

On divise par ω_0^2 :

$$\underline{z}_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = \underline{z}_m \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + i \frac{\omega}{\omega_0 Q} \right)$$

$$\underline{z}_0 \cdot x^2 = \underline{z}_m \left(1 - x^2 + i \frac{x}{Q} \right)$$

On obtient :

$$\underline{z}_m = \frac{z_0 x^2}{(1-x^2) + i \frac{x}{Q}}$$

$$z_m = |z_m| = \frac{z_0 x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Filte passe-haut.

4. En divisant Numérateur et Dénominateur par x^2 :

$$z_m = \frac{z_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{Qx}\right)^2}} = \frac{z_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}}$$

Maximum obtenu lorsque :

$$\frac{d}{dx} \left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2} \right) = 0$$

$$2x \frac{2}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{Q^2 x^3} = 0$$

$$\frac{4}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2Q^2}\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}$$

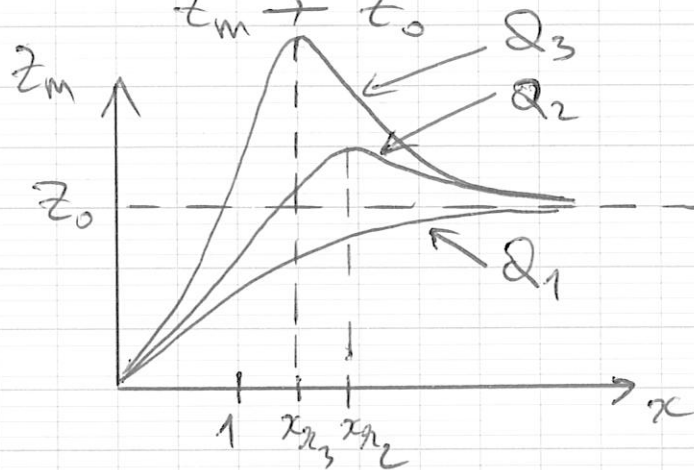
$$x = x_{gc} = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} > 1$$

BF : $x \rightarrow 0$

$z_m \rightarrow 0$

HF : $x \rightarrow \infty$

$z_m \rightarrow z_0$



6. On veut $z_m = z_0$ sur la \oplus grande plage de fréquences possibles.

$\Rightarrow \omega_0$ la \oplus basse possible

\Rightarrow régime critique $Q = \frac{1}{2}$.

Exercice 14

$$1) \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$$

↓ passage en complexes

$$\underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

↙

$$\underline{\dot{x}} = i\omega \underline{x}$$

$$\underline{\ddot{x}} = -\omega^2 \underline{x}$$

$$-\omega^2 \underline{x} + \frac{\omega_0}{Q} i\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{x} \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{x} \cancel{e^{j\omega t}} \left(-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 X_0 \cancel{e^{j\omega t}}$$

Amplitude complexe :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

2) Amplitude réelle :

$$X_{rr} = |\underline{x}| = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

3) Déphasage

$$\varphi = \arg(\underline{x}) = -\arctan \frac{\omega \frac{\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Remarque : $\varphi(\omega_0) = -\arctan \left(\frac{\frac{\omega_0^2}{Q}}{\omega_0^2 - \omega_0^2} \right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

↙ $\omega \rightarrow \infty$

$$\varphi(\omega_0) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

4) On lit : * Pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
 $\omega_0 = 5,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (graphe de gauche).

* $X_{H\text{max}}$ obtenu pour $\omega = \omega_R = 4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
(graphe de droite).

On sait que :

$$\omega_R = \frac{\omega_R}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\frac{1}{2Q^2} = 1 - \left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2$$

$$2Q^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2}$$

$$Q^2 = \frac{1}{2 - 2\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2 - 2\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2 - 2\left(\frac{4}{5,5}\right)^2}} \approx 1$$

(a)

Pour $\omega = \omega_0$, $X_H(\omega_0) \approx 1,8$ (b) $X_H(0) \approx 1,8$
(graphe de droite).

$$Q = \frac{X_H(\omega_0)}{X_H(0)} = \frac{1,8}{1,8} = 1$$