

CCB 24 25 : Révisions

Démos de cours de tous les programmes de colles

DMs et DSs à revoir

Voir « CCB Formulaires Archives » dans « Cahiers de Prépa » :

Formulaires et bilans

Pour s'entraîner :

- DS 3 ATS Pb 1 3 entraînement
- Extraits de sujets de concours :
 - ATS 2022 (Montagne) Q 12 13 (+ Doc 1) (Q14 à 19 = difficile) Q 20 à 32
 - ATS 2023 (Production énergie) Q 1 à 14, 25 à 41
 - CCP TSI 2013 (régime libre = DS3 + Premier problème, 3^{ème} partie = régime sinusoïdal forcé)

PROBLEME N°2 : SUSPENSION D'UN VEHICULE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE

TSI 2013

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat... Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre \vec{g} .

Données :

champ de pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Hypothèses :

tout au long du problème, on considèrera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Notations :

dérivées temporelles :

pour une fonction $x(t)$ les dérivées temporelles seront notées :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} ;$$

fonctions complexes :

pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

On notera $\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$,

où $x(t) = \text{Re}(\underline{x})$ et $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ (\underline{X}_m représente l'amplitude complexe de x).

On a donc $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1 .
 Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.
 Ici encore la position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4).
 Dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal.
 On a donc $z_s(t) = z_{s0} \cos(\omega t)$.

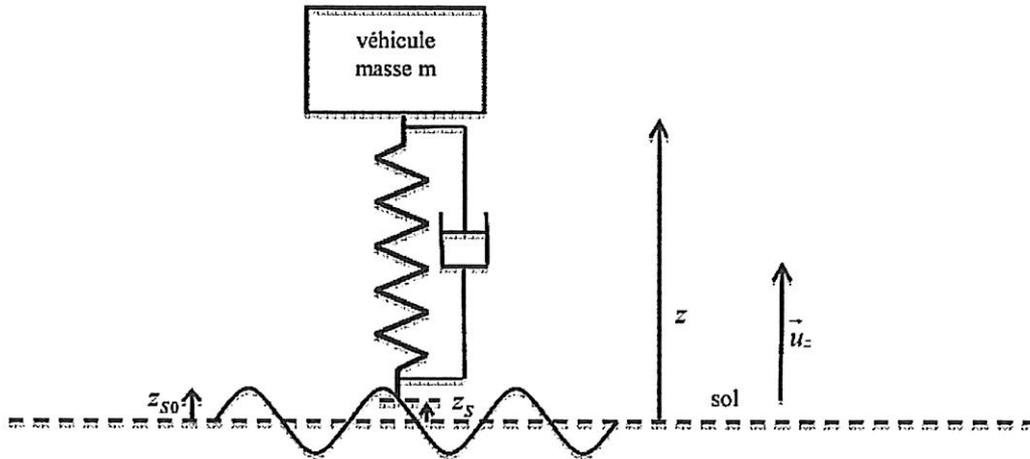


Figure 4 : régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide.

On a donc $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

13 – Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k , z , z_s , l_0 et du vecteur unitaire \vec{u}_z .

14 – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h , m , k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 2).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e , on posera $z' = z - z_e$.

Une étude préalable a montré que la position d'équilibre de la masse m permet d'écrire :

$$kz_e = kl_0 - mg$$

15 – Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme : $m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = Y(t)$.

Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s , \dot{z}_s , k et h .

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé.

16 – Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2\lambda = \frac{h}{m}.$$

Déterminer l'expression de la réponse complexe $\frac{Z'}{Z_s}$ de la suspension en fonction de ω , ω_0 et λ .

Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \left| \frac{Z_m'}{Z_{sm}} \right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$

17 – Etude de la réponse complexe.

17.1 – Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

17.2 – Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

17.3 – On considère pour simplifier :

- que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
- que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ . A quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

18 – Donner l'allure de la courbe représentant $H = \left| \frac{Z'}{Z_s} \right|$ en fonction de ω . On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

Phénomènes physiques en montagne

Introduction

ATS 202

Ce sujet propose d'étudier quelques phénomènes physiques rencontrés en montagne. Il est constitué de cinq parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

Les questions portant la mention **Résolution de problème** ne sont pas guidées et nécessitent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. Le barème accorde un poids significatif à ces questions.

I Le profil de pression

I.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

La pression atmosphérique décroît avec l'altitude. Cette partie propose d'étudier cet aspect. On choisit un axe z orienté vers le haut, on note $p_0 = 1,0$ bar la pression atmosphérique au niveau du sol (en $z = 0$) et $p(z)$ sa valeur pour une altitude z . On modélise l'atmosphère comme étant :

- statique,
- isotherme (température notée T_0 , prise environ égale à 15°C),
- et se comportant comme un gaz parfait.

Enfin, on note $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur, et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'air.

- 1 - Démontrer, à l'aide d'un bilan des forces sur un volume élémentaire de fluide situé entre les altitudes z et $z + dz$, que la pression satisfait à la relation suivante, où ρ est la masse volumique de l'air :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (1)$$

- 2 - Établir la relation entre la masse volumique $\rho(z)$ à l'altitude z , la pression $p(z)$ à cette altitude, T_0 , R et M .
- 3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$, puis en déduire que la pression évolue selon la loi $p(z) = p_0 e^{-z/H}$ avec H une constante dont on donnera l'expression en fonction de R , T_0 , g et M .
- 4 - Calculer une valeur approchée de H , sans oublier son unité.

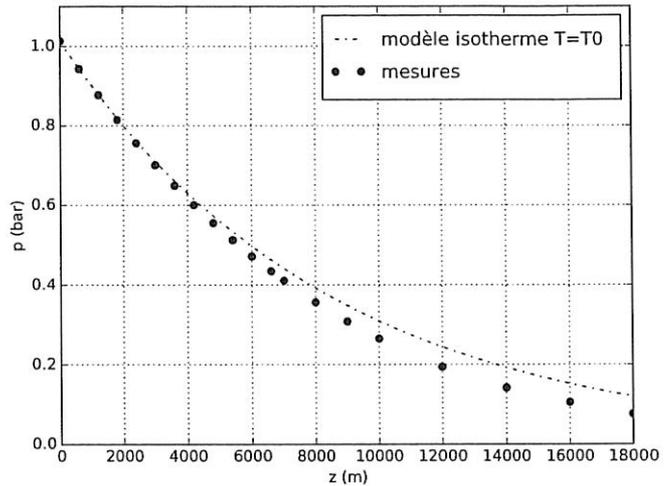
On se propose d'analyser l'accord entre les prévisions du modèle précédent et les relevés expérimentaux. De tels relevés, valables pour des conditions moyennes, sont présentés dans le tableau page suivante (document 1). La pression $p(z)$ donnée par ce tableau est également tracée sur le graphique du document 2, qui comporte aussi un tracé de la pression prédite par notre modèle. On pourra également utiliser le document 3.

- 5 - Jusqu'à quelle altitude les valeurs de la pression obtenues par ce modèle sont-elles en accord à mieux que 10% avec les données expérimentales ?

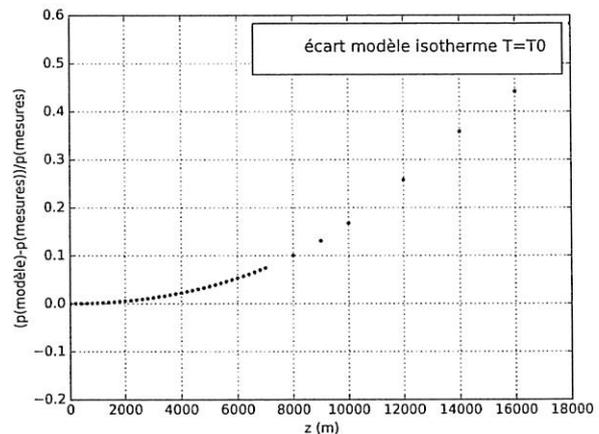
Quelle est l'hypothèse de notre modèle qui semble la moins bien vérifiée, et qui peut expliquer les écarts importants à haute altitude ?

Altitude m	Température °C	Pression kPa	Accélération gravitationnelle $g, \text{m/s}^2$
0	15,00	101,33	9,807
200	13,70	98,95	9,806
400	12,40	96,61	9,805
600	11,10	94,32	9,805
800	9,80	92,08	9,804
1 000	8,50	89,88	9,804
1 200	7,20	87,72	9,803
1 400	5,90	85,60	9,802
1 600	4,60	83,53	9,802
1 800	3,30	81,49	9,801
2 000	2,00	79,50	9,800
2 200	0,70	77,55	9,800
2 400	-0,59	75,63	9,799
2 600	-1,89	73,76	9,799
2 800	-3,19	71,92	9,798
3 000	-4,49	70,12	9,797
3 200	-5,79	68,36	9,797
3 400	-7,09	66,63	9,796
3 600	-8,39	64,94	9,796
3 800	-9,69	63,28	9,795
4 000	-10,98	61,66	9,794
4 200	-12,3	60,07	9,794
4 400	-13,6	58,52	9,793
4 600	-14,9	57,00	9,793
4 800	-16,2	55,51	9,792
5 000	-17,5	54,05	9,791
5 200	-18,8	52,62	9,791
5 400	-20,1	51,23	9,790
5 600	-21,4	49,86	9,789
5 800	-22,7	48,52	9,785
6 000	-24,0	47,22	9,788
6 200	-25,3	45,94	9,788
6 400	-26,6	44,69	9,787
6 600	-27,9	43,47	9,786
6 800	-29,2	42,27	9,785
7 000	-30,5	41,11	9,785
8 000	-36,9	35,65	9,782
9 000	-43,4	30,80	9,779
10 000	-49,9	26,50	9,776
12 000	-56,5	19,40	9,770
14 000	-56,5	14,17	9,764
16 000	-56,5	10,53	9,758
18 000	-56,5	7,57	9,751

Document 1 : propriétés moyennes de l'air à haute altitude – en partie d'après relevés expérimentaux.
(Source : *Thermodynamique, une approche pragmatique*, Çengel et al.)



Document 2 : $p(z)$ d'après les données du tableau du document 1 (points "mesures"), et d'après le modèle du sujet ("modèle isotherme $T = T_0$ ").



Document 3 : tracé de l'écart relatif entre mesures et modèle isotherme : $(p_{\text{modèle}}(z) - p_{\text{mesures}}(z))/p_{\text{mesures}}(z)$.

I.2 Étude du profil de pesanteur

Nous avons ci-dessus supposé la pesanteur g constante. Or celle-ci est plus faible à haute altitude. Il est possible d'obtenir l'expression de $g(r)$, où r est la distance au centre de la Terre, en étudiant une situation analogue en électrostatique.

On considère ainsi une boule chargée uniformément (densité volumique de charge électrique ρ), de rayon R . Cette distribution de charges produit un champ électrique \vec{E} . On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont le centre O est le centre de la boule.

- 6 - Donner l'expression de la charge électrique totale, notée Q , portée par la boule, en fonction de ρ et de R .
- 7 - En explicitant les invariances et les symétries du problème, donner les variables dont dépend le champ électrique \vec{E} , ainsi que sa direction en fonction des vecteurs de la base sphérique.
- 8 - En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique \vec{E} à la fois dans la boule et à l'extérieur.

Le calcul du champ \vec{E} ci-dessus est mathématiquement analogue au calcul du champ de pesanteur \vec{g} produit par une Terre à symétrie sphérique. Il est ainsi possible d'obtenir l'expression de l'intensité de la pesanteur $g(r)$ en fonction de la distance r au centre de la Terre :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}, \quad (2)$$

expression valable pour $r \geq R_T$, avec R_T le rayon de la Terre, M_T sa masse, et G la constante de gravitation universelle.

- 9 - En déduire l'expression de g en fonction de l'altitude z par rapport au sol, du rayon terrestre R_T , et de la valeur g_0 de la pesanteur en $z = 0$.
- 10 - À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en z/R_T , donner l'expression de g pour $z \ll R_T$.
- 11 - De combien la pesanteur a-t-elle diminuée à une altitude de 6,4 km ? On prendra $R_T = 6400$ km. Est-ce en accord avec le tableau de données du document 1 ?

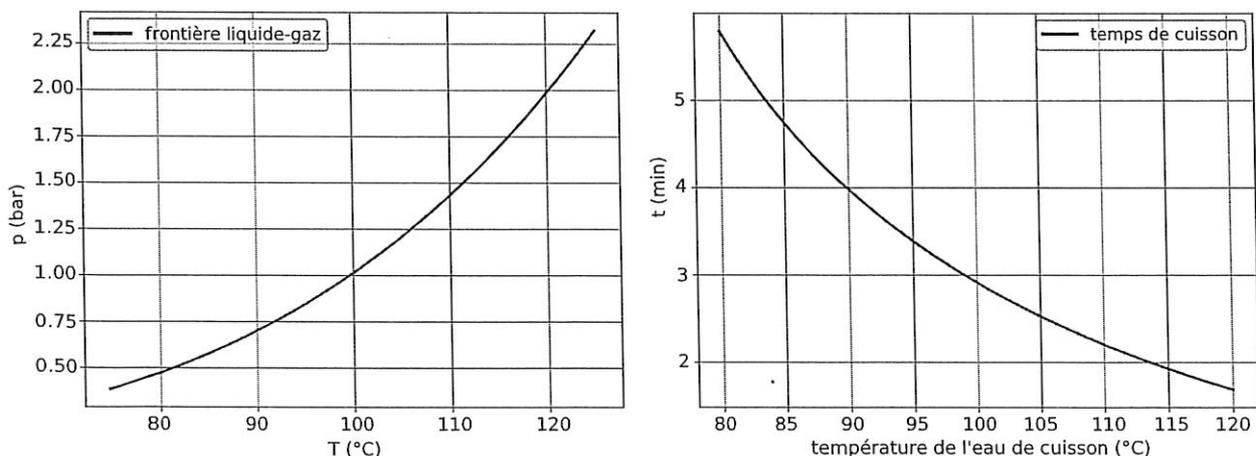
Ces très faibles variations justifient que l'on considère la pesanteur constante dans tout ce sujet.

I.3 Effet de la chute de pression sur la cuisson des aliments

- 12 - Sur votre feuille, dessiner l'allure du diagramme p - T de l'eau, où figurent les trois phases solide, liquide et gaz, le point triple et le point critique.

Des randonneurs préparent leur repas à une altitude de 2400 m. Ils souhaitent manger des œufs à la coque, pour lesquels on conseille traditionnellement une cuisson de 3 minutes dans l'eau bouillante.

La cuisson est bonne quand le jaune d'œuf atteint une température de 63 °C. Un modèle simplifié permet d'obtenir le temps que doit passer l'œuf dans l'eau pour atteindre 63 °C, en fonction de la température de l'eau dans laquelle il est plongé pour la cuisson (courbe ci-dessous à droite).



Document 4.

Gauche : zoom sur une portion du diagramme p - T de l'eau.

Droite : temps de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, en fonction de la température de l'eau de cuisson (source : <http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/>).

- 13 - (Résolution de problème) Expliquer pourquoi le temps usuel de trois minutes ne sera pas adapté ici, et donner le temps de cuisson des œufs pour nos deux randonneurs. On utilisera au besoin tout document de la partie I.

II Effet de foehn

Lorsqu'un courant aérien rencontre un relief large, il s'élève, se détend et se refroidit. Puis en redescendant sur l'autre versant il est comprimé et se réchauffe. Dans certaines conditions qui brisent la symétrie (formation de nuages ou précipitations sur un des versants seulement), l'air redescendant peut arriver en bas avec une température significativement plus élevée qu'elle ne l'était en bas de l'autre versant : ce vent chaud et sec est appelé foehn. Il est très courant dans les vallées alpines, ainsi que dans d'autres régions du monde où il est nommé différemment. On en propose une étude dans cette partie.

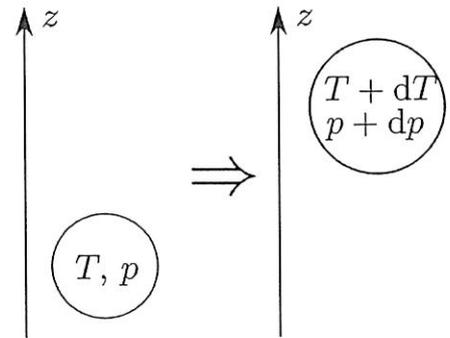
Dans toute cette partie on modélise l'air comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et d'indice adiabatique (rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant) $\gamma = 1,4$. On note $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur.

II.1 Gradient adiabatique sec

On s'intéresse d'abord aux variations de température subies par un volume d'air ascendant. On considère un axe z orienté vers le haut, $z = 0$ étant au niveau du sol.

On considère un volume élémentaire de fluide qui consiste en un volume fermé V d'air, situé à l'altitude z . Ce volume d'air est initialement à l'équilibre mécanique et thermique avec le reste de l'atmosphère, et on note $\rho(z)$, $p(z)$ et $T(z)$ sa masse volumique, pression et température.

On suppose que le volume d'air s'élève brusquement d'une très petite hauteur dz . On note dp et dT les variations de pression et de température associées. On suppose cette transformation adiabatique et réversible.



Document 5

14 - Quelle est la caractéristique de la transformation qui permet de la supposer adiabatique ?

15 - Indiquer les conditions d'application de la loi de Laplace.

En partant de la relation de Laplace qui relie pression et volume, établir la relation qui relie pression et température.

16 - En déduire la relation suivante entre variation de pression et de température pour le mouvement considéré : $(1 - \gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$.

17 - En déduire une expression de $\frac{dT}{dz}$ en fonction de $\frac{dp}{dz}$, γ , M , ρ et R .

18 - En utilisant la relation (1) de la partie I, et la relation trouvée à la question précédente, en déduire une expression de $\frac{dT}{dz}$ qui fait intervenir uniquement γ , M , g et R .

19 - Calculer la valeur numérique approchée de $\frac{dT}{dz}$ et l'exprimer en kelvins par kilomètre.

La valeur obtenue est appelée "gradient adiabatique sec", et donne la variation de température par kilomètre d'altitude lorsqu'une masse d'air s'élève de façon adiabatique et réversible.

II.2 Effet des précipitations

On suppose maintenant que la masse d'air possède une certaine humidité lorsqu'elle est au niveau du sol, et qu'en s'élevant la vapeur d'eau contenue dans l'air va se condenser sous forme liquide. On souhaite évaluer l'effet thermique de cette liquéfaction.

On donne :

- l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $h_{\text{vap}} = 2,3 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, supposée indépendante de la température,
- la capacité thermique massique à pression constante de l'air dans les conditions considérées ici : $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On considère le système isolé constitué de :

- une masse m_{air} d'air,
- une masse m_{vap} de vapeur d'eau ($\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$), très petite devant m_{air} .

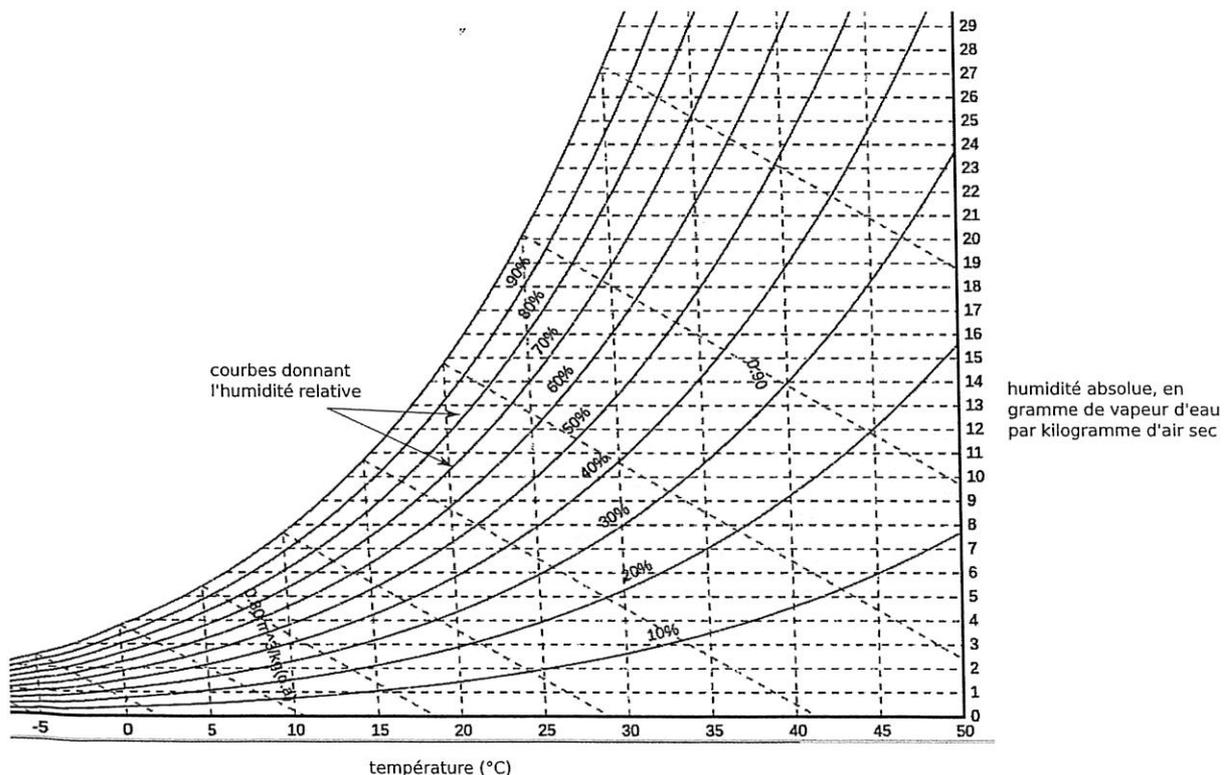
20 - On suppose que la masse m_{vap} de vapeur d'eau se liquéfie, à température et pression constantes, et que les seuls échanges thermiques qui ont lieu prennent place entre l'eau et l'air du système. En effectuant un bilan sur le système {eau}, donner l'expression du transfert thermique reçu par la masse d'air lors de cette transformation.

21 - En supposant que l'air seul reçoit le transfert thermique précédent, de façon isobare, en déduire l'expression de son élévation de température ΔT en fonction de $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$, h_{vap} et c_p .

Dans l'expression précédente, le rapport $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$ est appelé "humidité absolue" de l'air, souvent exprimée en gramme par kilogramme. Par exemple une humidité absolue de 20 g/kg signifie 20 g de vapeur d'eau par kilogramme d'air sec, soit donc $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}} = 20 \times 10^{-3}$.

L'humidité relative de l'air est un autre paramètre mesuré par les météorologues. Elle s'exprime souvent en pourcentage, et elle dépend de l'humidité absolue et de la température.

Le diagramme psychrométrique ci-dessous permet d'obtenir l'humidité absolue en connaissant la température de l'air et son humidité relative.

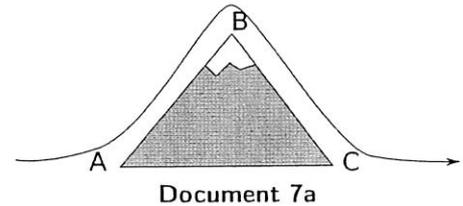


Document 6, d'après <http://www.flycarpet.net/en/PsyOnline>.

- 22 - Exploiter le graphique ci-dessus pour donner la valeur de $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$ pour 20°C et 70% d'humidité relative.
- 23 - En utilisant la valeur précédente du ratio $m_{\text{vap}}/m_{\text{air}}$, faire l'application numérique pour ΔT .
- 24 - Pourquoi aurait-on pu prévoir dès le départ que $\Delta T > 0$?

II.3 Effet de foehn

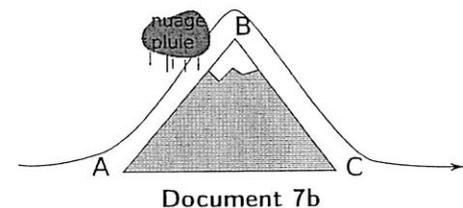
On s'intéresse enfin à l'effet de foehn. On considère d'abord un cas où l'atmosphère est sèche. On se place dans le cadre de la partie II.1. À cause du vent, une parcelle d'air s'élève le long d'une montagne dont le sommet est à l'altitude $h = 1000\text{ m}$ (document 7a). On modélise cette élévation comme étant adiabatique et réversible.



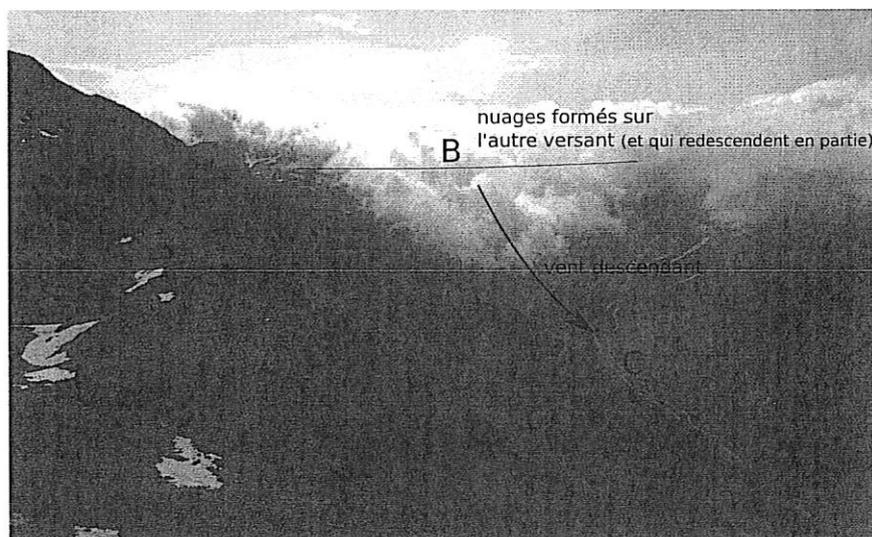
On prend par exemple $T_A = 20^\circ\text{C}$.

- 25 - Quelle est la valeur de la température de la parcelle d'air en B ?
- 26 - La parcelle d'air redescend ensuite sur l'autre flanc de la montagne et retourne en $z = 0$ (point C , de même altitude que A). Quelle est la valeur de la température en C ? Commenter.

On se place ensuite dans un cas où l'air en A est humide. En montant sur le flanc de la montagne, sa température chute et la vapeur d'eau qu'il contient se liquéfie. On suppose qu'une fois en B , cette vapeur d'eau s'est totalement liquéfiée et a été évacuée sous forme de nuage ou de pluie. L'air est alors sec au point B et effectue sa descente jusqu'en C (cf. document 7b).



- 27 - Estimer la valeur de la température en C . Commenter.



Document 8 : exemple de manifestation de l'effet de foehn dans les Alpes. On voit nettement la formation de nuages sur le versant ascendant (versant non visible sur la photographie), alors qu'ils sont relativement absents du versant descendant (qui est celui visible sur la photographie).

III La grêle

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

III.1 Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse m , qui chute dans le champ de pesanteur \vec{g} . On note z un axe descendant vers le sol. $z = 0$ marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note \vec{e}_z un vecteur unitaire orienté vers le bas.

On néglige ici tout frottement.

- 28 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en $z = 0$).
- 29 - Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de z .
- 30 - Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable?

III.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\vec{e}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}\pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0,5$.

- 31 - Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.
- 32 - Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α , m et g .

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim} , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours celles de la partie III.2. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Scilab retranscrit ci-dessous :

```

g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02 // pas d'intégration en secondes
fin = 15 // durée de la simulation en secondes

t(1) = 0 // temps initial
z(1) = 0 // position initiale
v(1) = 0 // vitesse initiale

nb_iterations = int(fin/dt)
for i=1:nb_iterations
    t(i+1) = t(i) + dt
    z(i+1) = [case 1 à compléter]
    v(i+1) = [case 2 à compléter]
end

```

Les valeurs de m et α sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

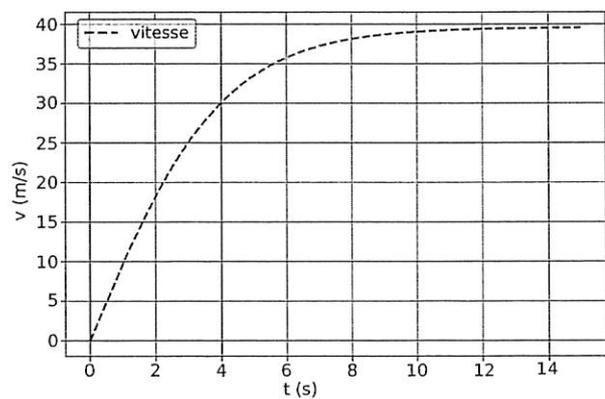
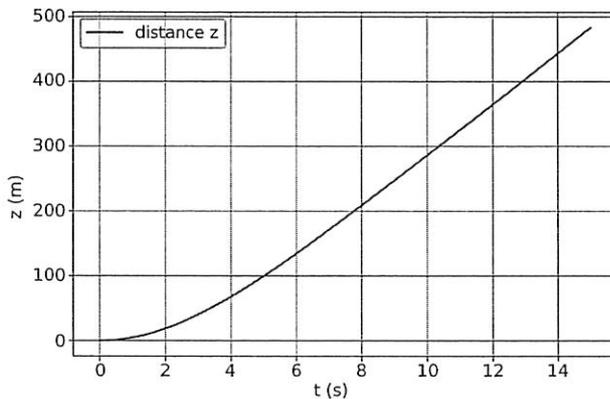
33 - Compléter la case 1 de l'algorithme.

34 - Compléter la case 2 de l'algorithme.

35 - Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenus par l'algorithme.

La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ?

Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.



Document 9 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

CONCOURS ATS
-SESSION 2023-

ÉPREUVE DE
SCIENCES PHYSIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 957

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

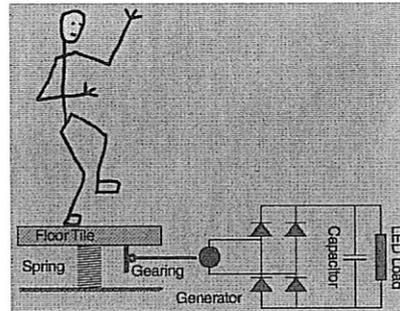
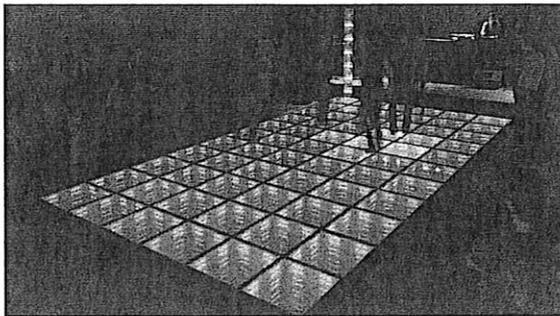
Des moyens de production d'énergie

Introduction

Ce sujet propose d'étudier différentes techniques de production ou de stockage d'énergie. Il est constitué de trois parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

I Récupération de l'énergie de vibration

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).



Document 1 : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

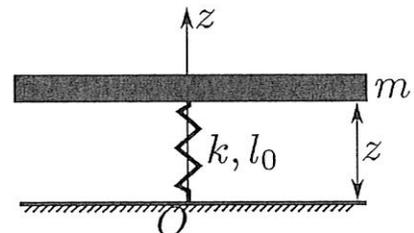
Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI 10.1109/MIAS.2010.939649.

Nous étudions dans un premier temps la réponse mécanique de ce système (I.1, I.2), puis le principe de conversion de puissance mécanique en puissance électrique (I.3).

I.1 Étude en régime libre

En première approximation, le système est modélisé comme une masse m (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement. C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse.

On note k la raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme g est dirigé vers le bas de la figure.



Document 2 : modèle simplifié du système réel.

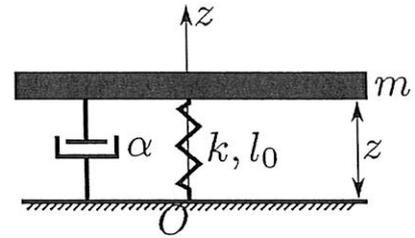
- 1 - En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ de la masse, en fonction de k , l_0 , m et g .

- 2 - Établir ensuite l'équation différentielle suivie par la variable $z(t)$ lorsque le système est mis en mouvement.
- 3 - Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration.

Quelle est la nature du mouvement ?

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3.

L'amortisseur exerce sur la masse une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ avec \vec{v} le vecteur vitesse de la masse et α une constante positive.



Document 3 : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement.

- 4 - En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable $z(t)$.
- 5 - Mettre l'équation obtenue sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e, \quad (1)$$

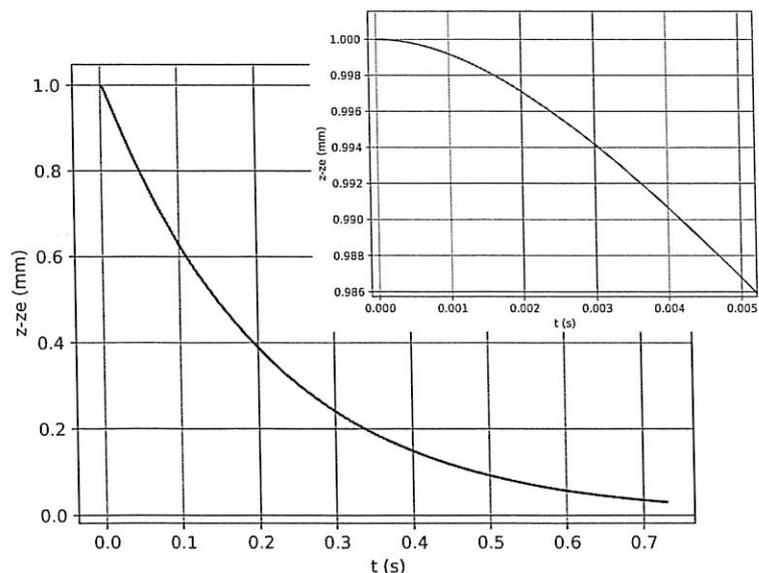
avec ω_0 , Q et z_e des constantes dont on donnera les expressions en fonction de m , k , l_0 , g et α .

- 6 - Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du second ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité Q qui correspondent à chaque régime. D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

m	k	α	ω_0	Q	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

- 7 - Le document 4 ci-contre montre le tracé de la solution $z(t) - z_e$. En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



Document 4 : tracé de $z(t) - z_e$ et zoom aux temps courts.

I.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé. On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais $z_e = 0$.

- On note $z_d(t) = A \cos(\omega t)$ la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur A est positif.
- On étudie le régime permanent où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $Z_m > 0$.
- On utilise la représentation complexe : $z_d(t)$ est représenté par $z_d(t) = A e^{j\omega t}$, et $z(t)$ est représenté par $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi}$. (Avec comme d'habitude j le complexe tel que $j^2 = -1$).

On admet qu'une démarche similaire à celle de la sous-partie précédente mène à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d, \quad (2)$$

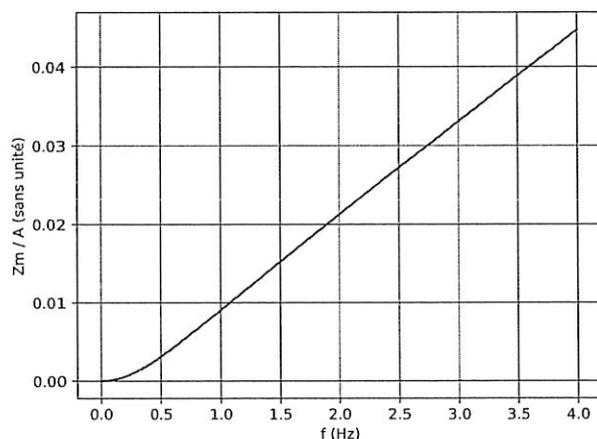
avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour ω_0 et Q , et avec μ une constante donnée par $\mu = (\text{masse du danseur})/m \simeq 0,7$.

- 8 - À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe \underline{Z}_m en fonction de ω , ω_0 , Q , μ et A .
- 9 - En déduire une expression de l'amplitude Z_m en fonction des mêmes paramètres.
- 10 - Donner l'expression de la limite de Z_m à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.

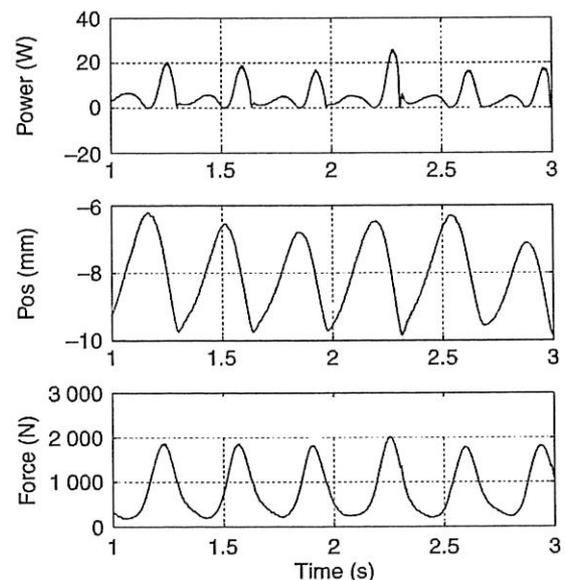
On admet qu'en posant $u = \frac{\omega_0}{\omega}$, on peut écrire $Z_m = \frac{A\mu}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + u^2/Q^2}}$.

- 11 - Montrer qu'il existe un phénomène de résonance à condition que Q vérifie une certaine inégalité qu'on établira.

Y a-t-il existence d'une résonance pour le système considéré ici ?



Document 5 : tracé de Z_m/A en fonction de la fréquence, à basse fréquence, à partir de l'expression établie dans cette sous-partie.



Document 6 : expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur). De bas en haut : enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle, de la position $z(t)$ de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire) et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

On s'intéresse maintenant à une confrontation entre notre modèle et un enregistrement en situation réelle. En exploitant les documents 5 et 6 :

- 12 - Proposer une estimation de la valeur de la fréquence f d'excitation, ainsi que de la valeur de Z_m à cette fréquence.
- 13 - En déduire une estimation de la valeur de l'amplitude A des mouvements du danseur.
- 14 - D'autre part, sachant que d'après l'équation (2), la force exercée par le danseur sur la dalle s'écrit $F = -(\text{masse danseur}) \times \ddot{z}_d$, estimez l'amplitude de cette force (la masse du danseur est de 60 kg). Cette amplitude est-elle du même ordre de grandeur que celle mesurée par le constructeur dans le document 6 ?

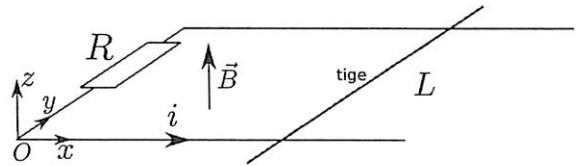
I.3 Principe de la conversion de puissance mécanique – électrique

Le mouvement de la dalle entraîne une génératrice électrique, qui est un dispositif qui permet de convertir une puissance mécanique en puissance électrique. C'est cet entraînement qui est en réalité responsable de la force d'amortissement en $-\alpha\vec{v}$ considérée dans les deux sous-parties précédentes.

Pour illustrer le principe de fonctionnement d'une génératrice, nous étudions une géométrie simplifiée qui correspond à la configuration des rails de Laplace.

Étude des rails de Laplace

On considère une tige qui peut glisser sans frottement sur deux rails parallèles (distants de L). La tige et les rails sont conducteurs, parcourus par un courant induit i et reliés à un dipôle résistif R (qui symbolise le dipôle vers lequel la puissance électrique est envoyée). Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ tel qu'indiqué sur le document 7. On néglige la résistance de la tige et des rails, ainsi que tout phénomène d'autoinduction.



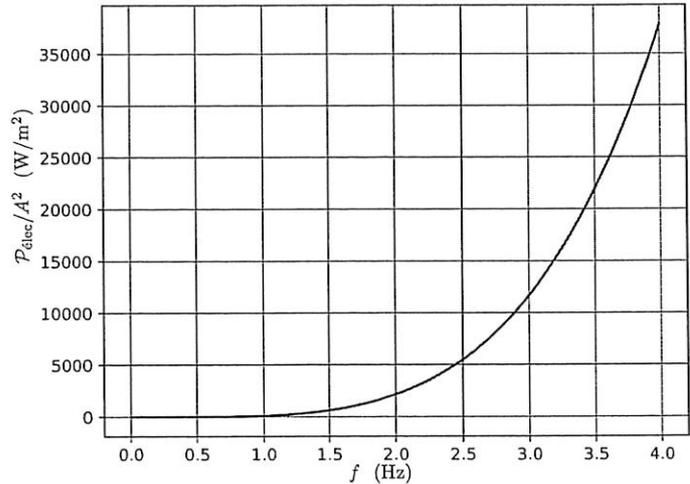
Document 7 : rails de Laplace. On note $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base cartésienne.

On note $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de la tige.

- 15 - Établir l'expression de la résultante des forces de Laplace agissant sur la tige, en fonction de L , B_0 , du courant induit i , et d'un vecteur unitaire bien choisi.
- 16 - D'autre part, établir l'expression de la force électromotrice induite (ou tension induite) e dans le circuit.
- 17 - En déduire une expression du courant induit i en fonction de L , B_0 , v et R .
- 18 - En déduire que la résultante des forces de Laplace peut s'écrire $-\alpha\vec{v}$ avec α une constante dont on donnera l'expression en fonction de L , B_0 et R .
Quelle est la loi qui garantit que $\alpha > 0$?
- 19 - Donner l'expression de la puissance des forces de Laplace. Commenter son signe.
- 20 - Montrer que la puissance électrique reçue par le dipôle R est égale à l'opposée de la puissance des forces de Laplace.

Ce qui précède peut être généralisé : la puissance électrique produite par le dispositif est, en régime sinusoïdal forcé et en moyenne sur une période, donnée par $\mathcal{P}_{\text{élec}} = \langle \alpha v^2 \rangle$. On peut exprimer la vitesse à l'aide de l'expression de Z_m obtenue dans la sous-partie I.2, et prendre la valeur de α du constructeur. On peut alors calculer la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ en fonction de la fréquence (cf document 8).

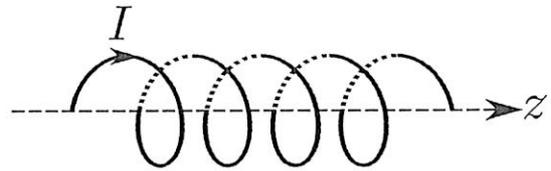
- 21 - En déduire une estimation de la puissance produite par le dispositif d'après notre modèle, si on se place dans les mêmes conditions que celles du document 6. Comparer aux valeurs mesurées par le constructeur dans le document 6.



Document 8 : tracé de la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ produite par le dispositif, divisée par A^2 , d'après le modèle développé dans cet énoncé.

Production du champ magnétique

Les trois questions qui suivent sont indépendantes du reste. On s'intéresse ici au dispositif qui permet de créer le champ magnétique stationnaire des rails de Laplace. Il s'agit d'une bobine cylindrique, ou solénoïde, parcourue par un courant I constant. On note n le nombre de spires par unité de longueur.



Document 9 : schéma de la bobine.

- 22 - Tracer l'allure de la carte des lignes de champ magnétique produites par la bobine.

On supposera dans la suite que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde. On néglige tout effet de bord : le solénoïde peut être considéré comme infini. On utilise les coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est celui du solénoïde.

- 23 - En utilisant les symétries et invariances de la distribution de courants, déterminer les variables dont dépend le champ \vec{B} ainsi que sa direction.

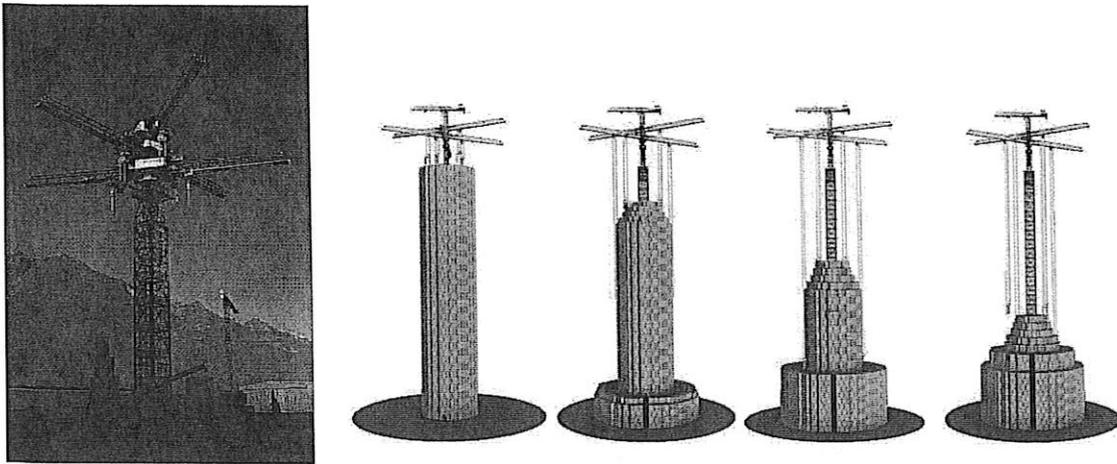
- 24 - À l'aide du théorème d'Ampère, établir l'expression du champ \vec{B} à l'intérieur du solénoïde.

II Stockage gravitaire

Les dispositifs solaires ou éoliens sont dits intermittents : ils produisent une puissance électrique qui dépend de conditions extérieures incontrôlables (vent, éclairage solaire). Stocker l'énergie produite lorsque les conditions sont favorables est ainsi un enjeu majeur. Ceci peut se faire à l'aide de batteries, de stations de transfert d'énergie par pompage (STEP), etc...

Un autre moyen de stockage, récemment envisagé et étudié dans cette partie, consiste à stocker des blocs de béton en hauteur. On distingue deux phases de fonctionnement :

- Lorsqu'un surplus de production électrique est disponible, on s'en sert pour alimenter les moteurs électriques de la grue et faire monter des blocs de béton.
- Lorsque l'on souhaite produire de la puissance électrique, on fait descendre des blocs de béton. En effet, lors d'une descente, le bloc entraîne une génératrice électrique qui injecte de l'électricité sur le réseau.



Document 10 : photographie du prototype d'Energy Vault, et schéma de principe qui montre le stockage des blocs de béton.
<https://www.connaissancedesenergies.org/une-tour-de-blocs-de-beton-pour-stocker-lelectricite-220218> et ©Energy Vault.

C'est la société Energy Vault qui propose ce concept. Elle envisage le dimensionnement suivant pour un dispositif utilisé en conditions réelles :

- Chaque bloc a une masse de 30 tonnes et il y a 5000 blocs.
- La vitesse de descente d'un bloc est de 3 m/s.
- La grue possède six bras.
- La hauteur de la grue est de 120 m.

On rappelle la valeur de l'accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

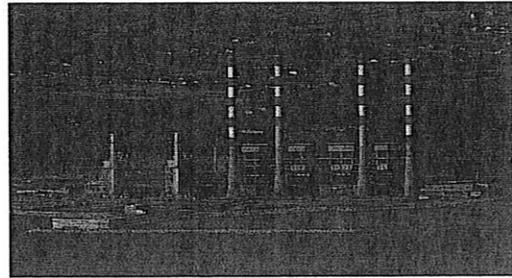
Les deux questions qui suivent ne sont pas guidées et nécessitent de l'initiative. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. De plus, le candidat effectuera les approximations nécessaires pour que les calculs restent simples.

25 - (Résolution de problème) Évaluer l'énergie maximale que peut stocker ce dispositif.

26 - (Résolution de problème) Évaluer la puissance maximale que peut délivrer ce dispositif.

III Production de travail mécanique à partir d'une source chaude —

La production d'électricité est en majeure partie réalisée dans des centrales où une source chaude (combustion de charbon, de gaz, de fioul, de bois... ou nucléaire) fournit un transfert thermique à un fluide caloporteur, qui ensuite met en rotation une turbine, qui à son tour entraîne une génératrice électrique.



Exemple de la centrale à gaz de Martigues, France.
Puissance totale de 930 MW.

III.1 Étude du cycle à vapeur à partir du diagramme $T-s$

Nous étudions ici le cycle thermodynamique suivi par le fluide, dans un exemple simplifié et typique de ce qui est mis en œuvre dans une centrale thermique de puissance moyenne (5 à 20 MW). Le fluide caloporteur est de l'eau. Il évolue selon les étapes décrites dans le document 11.

Répondre aux trois questions suivantes en s'aidant du diagramme $T-s$ du document 11. Pour répondre, il est nécessaire d'y tracer le cycle. Toutefois ce diagramme n'est pas à rendre avec la copie, seules les réponses aux questions qui suivent sont évaluées.

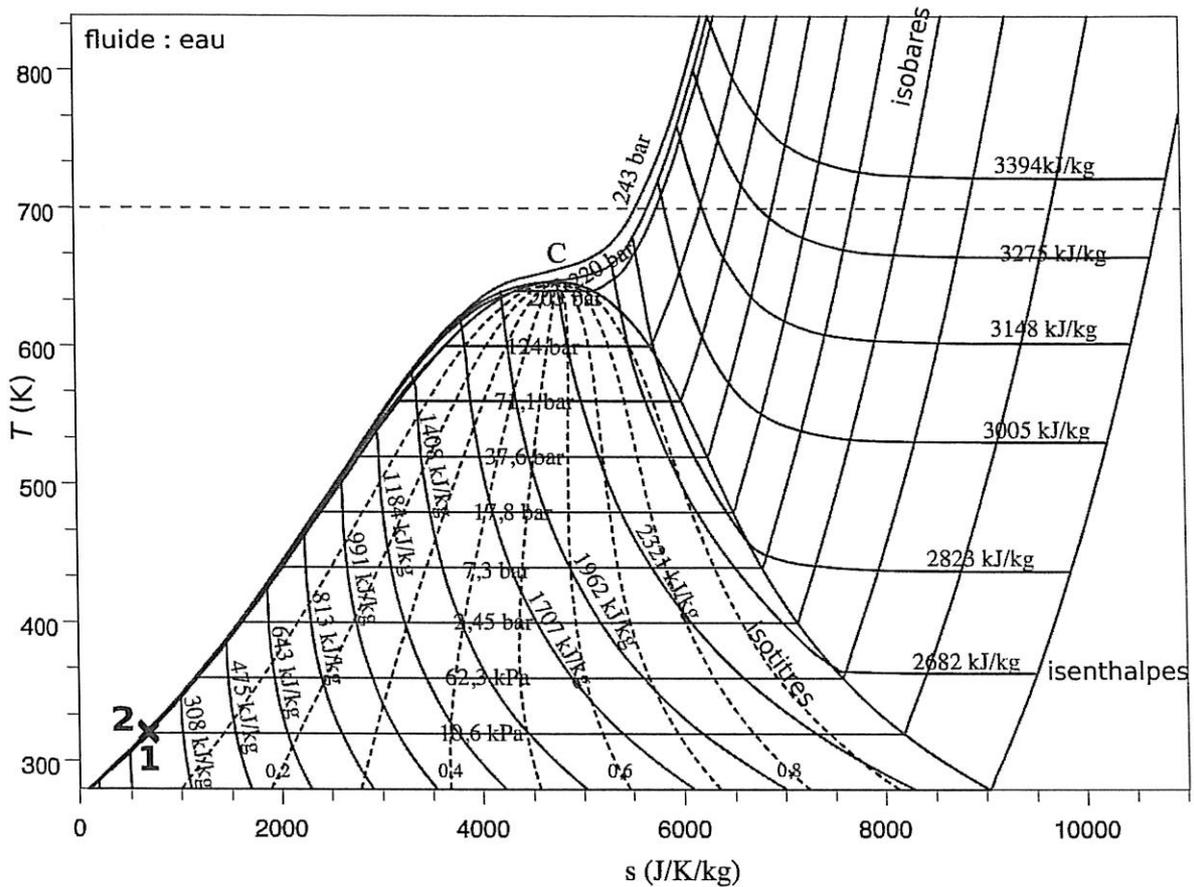
- 27 - Au point 3 : donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique h_3 et de l'entropie massique s_3 du fluide.
- 28 - Au point 4 : donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique h_4 et de l'entropie massique s_4 du fluide.
- 29 - Donner également les valeurs approchées du titre en vapeur x_4 et de la température T_4 .

On s'intéresse ensuite au rendement du cycle.

- 30 - Exprimer le transfert thermique massique q_{23} reçu par l'eau lors de l'étape $2 \rightarrow 3$, en fonction des enthalpies massiques. On justifiera la réponse.
Faire l'application numérique approchée.
- 31 - Exprimer le travail indiqué massique $w_{i,34}$ reçu par l'eau lors de la détente $3 \rightarrow 4$ dans la turbine, en fonction des enthalpies massiques.
Faire l'application numérique approchée et commenter son signe.
- 32 - Exprimer également le travail indiqué massique $w_{i,12}$ reçu par l'eau lors de la compression $1 \rightarrow 2$, en fonction des enthalpies massiques.
Faire l'application numérique approchée.
- 33 - Définir le rendement η de ce cycle en fonction de grandeurs prises parmi q_{23} , q_{41} , $w_{i,34}$ et $w_{i,12}$.
- 34 - Faire l'application numérique approchée pour η .

Dans les deux questions qui suivent, on prendra pour simplifier $\eta = 1/3$ et $|w_{i,34}| = 1000 \text{ kJ/kg}$. On souhaite produire une puissance mécanique $\mathcal{P} = 50 \text{ MW}$ en sortie de turbine.

- 35 - Estimer la valeur du débit massique à imposer à l'eau dans le circuit.
- 36 - Estimer la valeur de la puissance thermique \mathcal{P}_{th} que doit recevoir l'eau lors de l'étape $2 \rightarrow 3$.



Description du cycle

Les points 1 et 2 sont déjà représentés sur le diagramme T - s (ils sont quasiment confondus). Le fluide est de l'eau.

- Dans l'état 1, il est à l'état liquide saturé, de température $T_1 = 320$ K, pression $p_1 = 10,6$ kPa et enthalpie massique $h_1 = 197$ kJ/kg.
- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique réversible.
On donne $T_2 = 320$ K, $p_2 = 124$ bar, $h_2 = 209$ kJ/kg.
- $2 \rightarrow 3$: apport de chaleur isobare ($p_3 = p_2 = 124$ bar) et sans parties mobiles, c'est-à-dire que l'eau reçoit un transfert thermique massique en circulant dans un échangeur thermique au contact de la source chaude (là où le combustible est brûlé). Dans l'état 3 l'eau est sous forme de vapeur sèche à $T_3 = 700$ K.
- $3 \rightarrow 4$: détente de l'eau dans une turbine jusqu'à être ramenée à la pression $p_4 = p_1 = 10,6$ kPa. Une partie du travail produit par cette turbine sert à faire fonctionner le compresseur qui réalise l'étape $1 \rightarrow 2$, le reste étant le travail utile (utilisé pour ensuite entraîner la génératrice électrique). On suppose la détente adiabatique et réversible. L'état 4 est diphasique et on note x_4 le titre en vapeur au point 4.
- $4 \rightarrow 1$: le fluide cède un transfert thermique vers le milieu extérieur afin de se condenser et de retourner dans l'état 1. Il le fait en circulant dans un échangeur thermique isobare et sans parties mobiles.

On néglige toute variation d'énergie cinétique ou potentielle de l'eau.

Document 11 : diagramme température T – entropie massique s de l'eau et description du cycle modèle. Sur le diagramme sont également tracées les isobares, isenthalpes et isotitres.

III.2 Étude du cycle à vapeur sans le diagramme et rôle de p_3 et T_3

Cette sous-partie vise à aboutir à une expression du rendement du cycle en se basant non pas sur une lecture du diagramme T - s , mais sur des expressions établies sous des hypothèses simplificatrices :

- la vapeur est décrite comme un gaz parfait ;
- on donne $c_p = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau, supposée constante.

Par ailleurs, on note $h_0 = 2590 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ l'enthalpie massique de la vapeur d'eau à $T_0 = 320 \text{ K}$ et $p_0 = 10,6 \text{ kPa}$, et $s_0 = 8150 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ l'entropie massique en ce même point.

37 - Établir l'expression de l'enthalpie massique h_3 dans l'état 3, en fonction de c_p , T_3 , T_0 et h_0 .

Étant donnés $p_3 = 124 \text{ bar}$ et $T_3 = 700 \text{ K}$, on peut utiliser l'expression de l'entropie massique du gaz parfait pour obtenir $s_3 = s_0 + c_p \ln(T_3/T_0) - (R/M) \ln(p_3/p_0) = 6450 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

38 - Quelle est alors la valeur de l'entropie massique s_4 au point 4 sous l'hypothèse d'une détente adiabatique et réversible ?

On admet que l'état 4 est diphasique, avec $T_4 = 320 \text{ K}$ et s_4 connu. On note h_v et s_v l'enthalpie massique et l'entropie massique de la vapeur saturée à T_4 , et h_l et s_l celles du liquide saturé à T_4 .

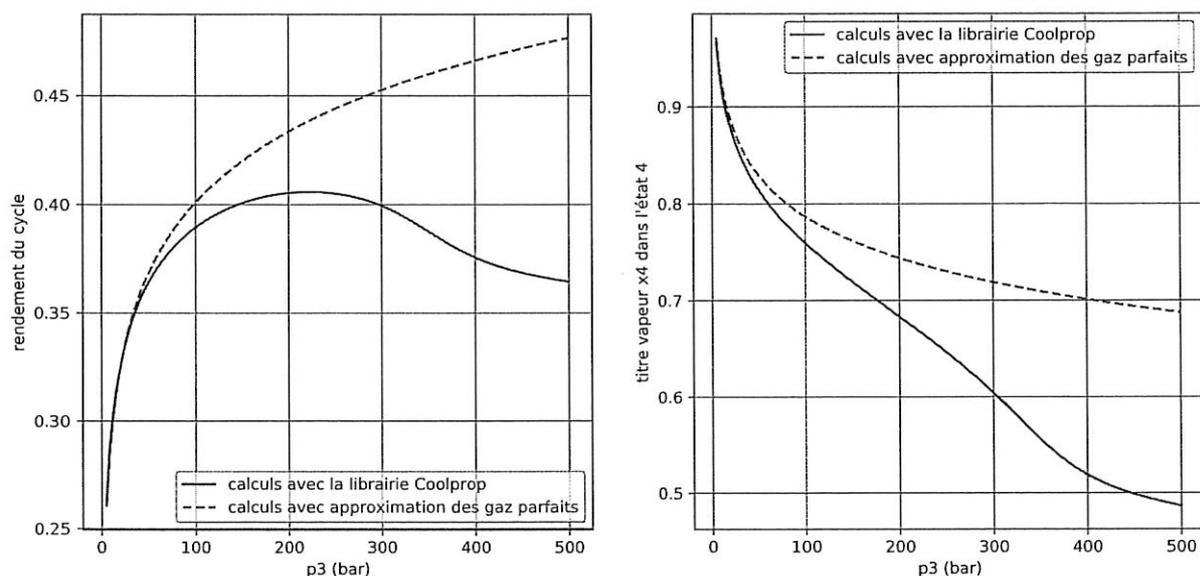
39 - Donner l'expression du titre massique en vapeur x_4 au point 4, en fonction de grandeurs parmi celles ci-dessus.

40 - Même question pour l'enthalpie massique h_4 au point 4.

Nous avons alors toutes les grandeurs nécessaires au calcul du rendement η . Les applications numériques donnent $h_3 = 3350 \text{ kJ/kg}$, $x_4 = 0,77$, $h_4 = 2044 \text{ kJ/kg}$, et $\eta = 0,41$, ce qui n'est pas très éloigné de ce qui est obtenu sans approximation en utilisant le diagramme (partie III.1).

Le graphique du document 12 compare les valeurs du rendement η et du titre x_4 obtenues avec les approximations faites dans cette partie III.2 (gaz parfait, etc.), et obtenues avec un calcul beaucoup plus exact (qui revient à utiliser le diagramme, partie III.1).

41 - À votre connaissance, dans quel domaine de température et de pression le modèle du gaz parfait est-il approprié ? En quoi ceci se retrouve-t-il ici ?



Document 12 : rendement du cycle (à gauche) et titre en vapeur dans l'état 4 (à droite) en fonction de la valeur choisie pour la pression p_3 . Ici $T_3 = 700 \text{ K}$ est fixé et l'état 1 est toujours le même. Courbes en traits pointillés : d'après les expressions approchées établies dans la sous-partie III.2. Courbes en traits pleins : calculs réalisés avec la librairie Coolprop (qui sert aussi au tracé du diagramme T - s de l'énoncé).