Régime forcé

$z_s(t) = z_{S_0} \cos(\omega t)$

$\rightarrow \underline{z_s}(t) = z_{S_0} e^{j\omega t}$ grandeur complexe

$\underline{Z}_s = z_{S_0}$ amplitude complexe

13. $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_x}$ avec $\vec{e_x}$ vecteur sortant

Avec $\ell = z - z_s$ et $\vec{e_x} = \vec{u_z}$

$\vec{T} = -k(z - z_s - \ell_0)\vec{u_z}$

14. * Référentiel : Terrestre (galiléen)

* Système : véhicule de masse m considéré comme ponctuel

* Bilan des forces :

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$

$\vec{T} = -k(z - z_s - \ell_0)\vec{u_z}$

$\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u_z}$

*PFD :

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

$-mg\vec{u_z} - k(z - z_s - \ell_0)\vec{u_z} - h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u_z} = m\ddot{z}\vec{u_z}$

En projetant sur $\vec{u_z}$:

$-mg - k(z - z_s - \ell_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_s) = m\ddot{z}$

$\Leftrightarrow$

$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -mg + h\dot{z}_s + kz_s + k\ell_0$

15. En écrivant : $z = z' + z_e$

$\Rightarrow \dot{z} = \dot{z}'$ et $\ddot{z} = \ddot{z}'$

On obtient :

$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' + kz_e = -mg + h\dot{z}_s + kz_s + k\ell_0$

D'après la condition d'équilibre :

$$z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

ou

$$kz_e = kl_0 - mg$$

On peut simplifier l'expression précédente :

$$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' + \cancel{kz_e} = \cancel{-mg} + h\dot{z}_s + kz_s + \cancel{kl_0}$$

On obtient :

$$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = \underline{h\dot{z}_s + kz_s} \qquad (1)$$

$$\underline{Y(t) = h\dot{z}_s + kz_s}$$

16. $\underline{z}'(t) = \underline{Z}'_m e^{j\omega t}$

$$\dot{\underline{z}}'(t) = j\omega \underline{z}'(t) = j\omega \underline{Z}'_m e^{j\omega t}$$

$$\ddot{\underline{z}}'(t) = -\omega^2 \underline{z}'(t) = -\omega^2 \underline{Z}'_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{z}_s(t) = \underline{Z}_{sm} e^{j\omega t}$$

$$\dot{\underline{z}}_s(t) = j\omega \underline{z}_s(t) = j\omega \underline{Z}_{sm} e^{j\omega t}$$

l'équation (1) devient :

$$-m\omega^2 \underline{Z}'_m \cancel{e^{j\omega t}} + j\omega h \underline{Z}'_m \cancel{e^{j\omega t}} + k\underline{Z}'_m \cancel{e^{j\omega t}} = j\omega h \underline{Z}_{sm} \cancel{e^{j\omega t}} + k\underline{Z}_{sm} \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z}'_m(-m\omega^2 + j\omega h + k) = \underline{Z}_{sm}(j\omega h + k)$$

Avec $\left| \begin{array}{l} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \quad \text{c'est à dire } k = \omega_0^2 m \\[2ex] 2\lambda = \dfrac{h}{m} \quad \text{c'est à dire } h = 2\lambda m \end{array} \right.$

On obtient :

$$\underline{Z}_m'(-m\omega^2 + j\omega 2\lambda m + \omega_0^2 m) = \underline{Z}_{sm}(j\omega 2\lambda m + \omega_0^2 m)$$

$$\underline{Z}_m' \cancel{m}(-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2) = \underline{Z}_{sm} \cancel{m}(2\lambda j\omega + \omega_0^2)$$

$$\frac{\underline{Z}_m'}{\underline{Z}_{sm}} = \frac{2\lambda j\omega + \omega_0^2}{-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 + 2\lambda j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega}$$

En passant au module :

$$H = \left|\frac{\underline{Z}_m'}{\underline{Z}_{sm}}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

17.1. $\omega \to 0$

$\Rightarrow H \to 1$

$\Rightarrow Z_m' = Z_{sm}$

La masse suit le relief du sol, le ressort a constamment sa longueur d'équilibre.

17.2. $\omega \to \infty$

$\Rightarrow H \to 0$

La masse m ne bouge pas par rapport au sol.

17.3. $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2$ minimal lorsque

$$\frac{d}{d\omega}\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right) = 0$$

$\Leftrightarrow -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\lambda^2\omega = 0$

$\Leftrightarrow 4\omega(-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\lambda^2) = 0$

$\Leftrightarrow \omega = 0$ ou

$-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\lambda^2 = 0$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$$
$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

18 -