CCB 2

PROBLÈME 2

TSI CT1 2018

② 1 Q1. Cavité résonante.

1 Fondamental + harmoniques.

① Q2. $\simeq 0,54$ kHz.

Q3. Interférences constructives.

② 1 $\pi D = k\lambda = k\dfrac{c}{f}$

Fondamental $k = 1$

$\pi D = \dfrac{c}{f}$ $\quad c = \pi D f$

$= \pi \times 0,12 \times 540$

1 $= 203 \text{ m.s}^{-1}$

⑤ 1 Q4. $f_1 = 540$ Hz

1 $f_2 = 1080$ Hz

1 $f_3 = 1620$ Hz

1 1 $f_4 = 2160$ Hz $\quad f_n = n f_1$

① Q5. Bande passante

Ici 10^2 Hz à $\begin{cases} 8.10^3 \text{ Hz} \\ 2.10^4 \text{ Hz} \end{cases}$?

① Q6. Décroissance du son en fonction du temps.

Référentiel : Terrestre

1 1 Q7. $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ (PFD) Système : masse

Sur x

1 $-\alpha \dfrac{dx}{dt} - kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

1 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \alpha\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$

1 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{k}{m}x = 0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

Bilan :

$\vec{P} = mg\vec{u_z}$

$\vec{N} = -\vec{P}$

$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u_x}$

$= -kx\vec{u_x}$

$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

$= -\alpha\dot{x}\vec{u_x}$

1

Identification :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$$

(7) 1 $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad.s^{-1})

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{1}{Q} = \frac{\alpha}{m}$$

1 $\frac{\sqrt{km}}{\alpha} = Q$ (sans dimension)

(2) 1 Q8 – ω_0 = pulsation propre (rad.s^{-1})

1 Q = facteur de qualité (sans dimension)

Q9 – Frottement "faible"

$\Rightarrow$ Régime pseudo-périodique

1 $x(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$.

Avec : $\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right) < 0$

ou $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$

1 $= \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$.

⚠ Frottement "faible" $\Rightarrow Q \gg 1$

$\Rightarrow \Delta \simeq -4\omega_0^2$

$\lambda_1 = \alpha + j\beta \simeq -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0$

$\lambda_2 = \alpha - j\beta \simeq -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0$

$\left(\frac{\omega_0}{2Q} = \lambda\right)$

1 $x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)$

1 CI : $x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

7

$$\frac{dx}{dt}(0) = V_0$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)B\sin\omega_0 t\right)$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)B\sin\omega_0 t$$

$$+ B\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\omega_0\cos\omega_0 t$$

1

$$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega_0 = V_0$$

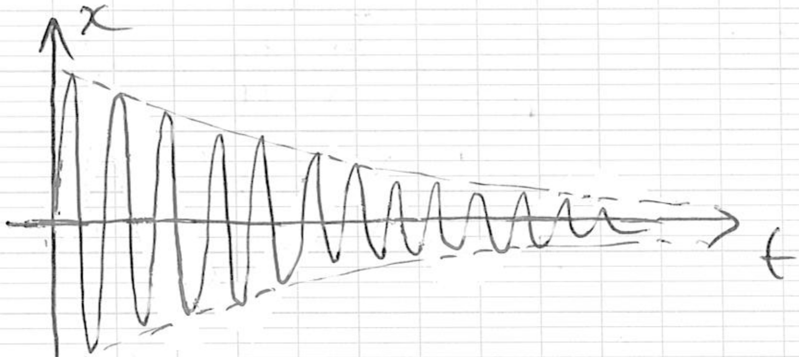
$$\Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega_0}$$

1

d'où :

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin(\omega_0 t)$$

1



1

Q10. Décroissance exponentielle

Q11. Amplitude du fondamental :

t	Ampl
(0	4,5)
1	4
2	2
3	1
4	0,6

1 Amplitude divisée par 2 toutes les secondes ($\tau = 1$)

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\tau\right) = \frac{1}{2}$$

ou décrément logarithmique !

② $$-\frac{\omega_0}{2Q}\tau = \ln\frac{1}{2}$$

$$\frac{\omega_0}{2Q}\tau = \ln 2$$

1 $$\frac{\omega_0 \tau}{2\ln 2} = Q$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$
$= 2\pi \times 540$

$$Q = \frac{2\pi \times 540 \times 1}{2 \times \ln 2} = 2{,}5.10^3$$

① Q12. $5\tau \simeq 5\,s$

(τ caractéristique du régime transitoire)

Q13. $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{X}\exp(j\omega t)$$

③ 1 $\underline{X}$ = amplitude complexe

1 $|\underline{X}|$ = amplitude

1 $Arg(\underline{X})$ = ~~déphasage~~ phase à l'origine

1 Q14. $$\frac{dx}{dt} = j\omega\underline{X}$$

1 $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\underline{X}$$

d'où : $$\left(-\omega^2 + \frac{j}{Q}\omega\omega_0 + \omega_0^2\right)\underline{X}\exp(j\omega t) = A_0\exp(j\omega t + \phi)$$

(4) 1

$$\underline{X} = \frac{A_0 \exp(j\varphi)}{(\omega_0^2-\omega^2) + \frac{j}{Q}\omega\omega_0}$$

1

$$|\underline{X}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

1 Q15. $\omega \to 0 \Rightarrow |\underline{X}| \to \frac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0$

(4) 1 $\omega \to +\infty \Rightarrow |\underline{X}| \to 0$.

1 $\omega = \omega_0 \Rightarrow |\underline{X}|$ maxi.

1 $\Rightarrow$ Graphe $\underline{\underline{2}}$

Q16. $$\frac{|\underline{X}|}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

$$y = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\frac{|\underline{X}|}{A_0} = \frac{1}{\omega_0^2\underbrace{\sqrt{(1-y^2)^2 + \left(\frac{y}{Q}\right)^2}}_{D}}$$

1 Resonance si D présente un minimum.

si $(1-y^2)^2 + \left(\frac{y}{Q}\right)^2$ présente un minimum

(3) 1 $$\frac{d}{dy}\left((1-y^2)^2 + \left(\frac{y}{Q}\right)^2\right) = 0$$

$$-2y \times 2 \times (1-y^2) + \frac{2y}{Q^2} = 0$$

$$2y\left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2y^2\right) = 0$$

$y = 0$ ou

5

$$\frac{1}{Q^2} - 2 + 2y^2 = 0$$

$$2y^2 = -\frac{1}{Q^2} + 2$$

Il faut $-\frac{1}{Q^2} + 2 \geqslant 0$

$$\frac{1}{Q^2} \leqslant 2$$

1 $Q^2 \geqslant \frac{1}{2}$ $\quad Q \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

② 1 Q17. $2y_r^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$

$$y_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

1 $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Q18. $Q \gg Q_0$

1 $\Rightarrow \frac{1}{2Q^2} \ll 1 \Rightarrow \omega_r \simeq \omega_0$

1 Q19. $X_r = |\underline{X}_r| = \frac{A_0}{\frac{\omega_0^2}{Q}} = A_0 \frac{Q}{\omega_0^2}$

② 1 Q20. ω_1 et ω_2 obtenues lorsque $X = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$

1 $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$