M5 TD RESONANCE VERRE

PROBLEME (EXTRAIT CONCOURS)

Aide aux calculs : $\frac{\pi}{ln2} \cong 4{,}5$ $4{,}5 * 0{,}54 \cong 2{,}5$

I Analyse expérimentale des vibrations du verre

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

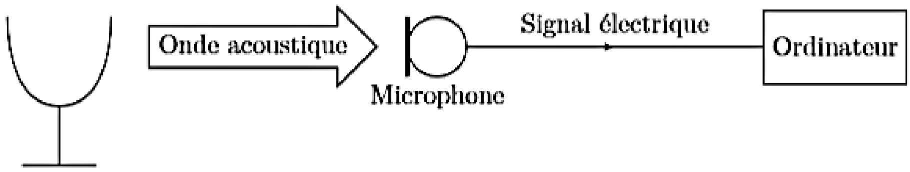

Figure 1

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur. Son analyse spectrale peut alors être réalisée à tout moment de l'enregistrement. Le microphone utilisé pour l'enregistrement présente une courbe de réponse en fonction de la fréquence donnée sur la figure 2.

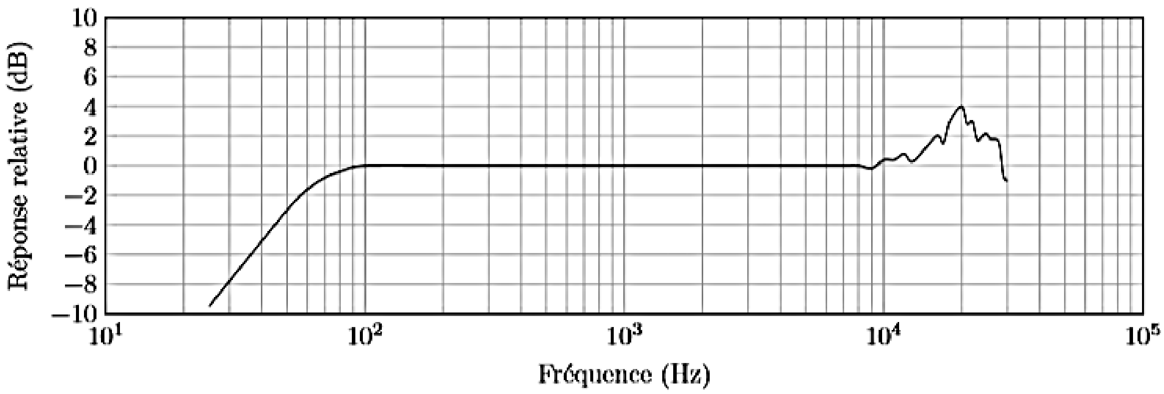

Figure 2 Réponse relative du microphone en fonction de la fréquence

La figure 3 représente le chronogramme de cet enregistrement et la figure 4 une analyse spectrale réalisée peu après le début de l'enregistrement. La figure 5 présente son analyse spectrale aux dates $t = 1{,}0$, $2{,}0$, $3{,}0$ et $4{,}0$ s.

I.A – Analyse qualitative de l'enregistrement

Les « pics » représentés dans les analyses spectrales correspondent à des modes propres de vibration du verre.

Q 1. Que signifie la présence de modes propres dans le signal enregistré ? Comment peut-on les nommer ?

Q 2. Quelle est la fréquence du signal enregistré ?

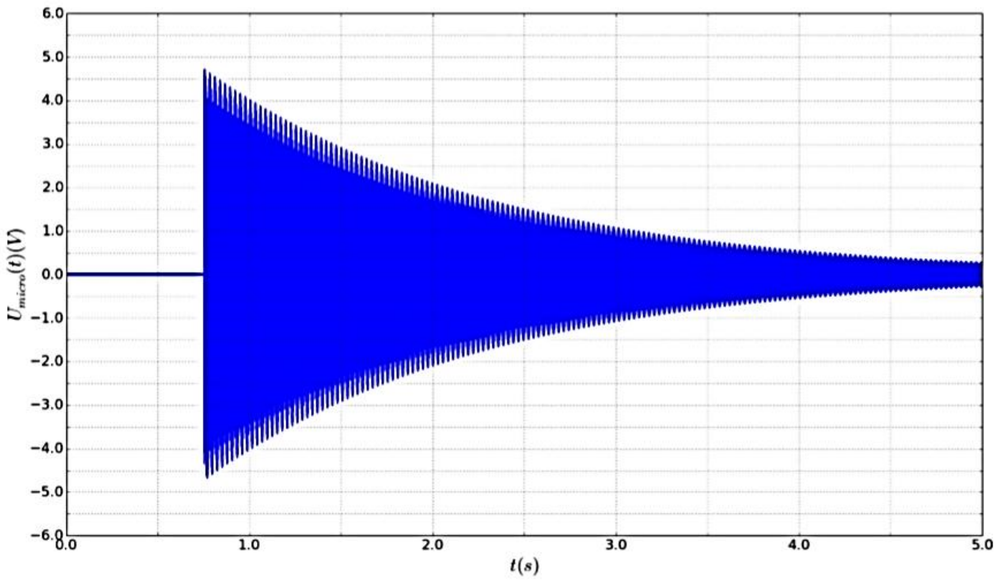

Figure 3 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

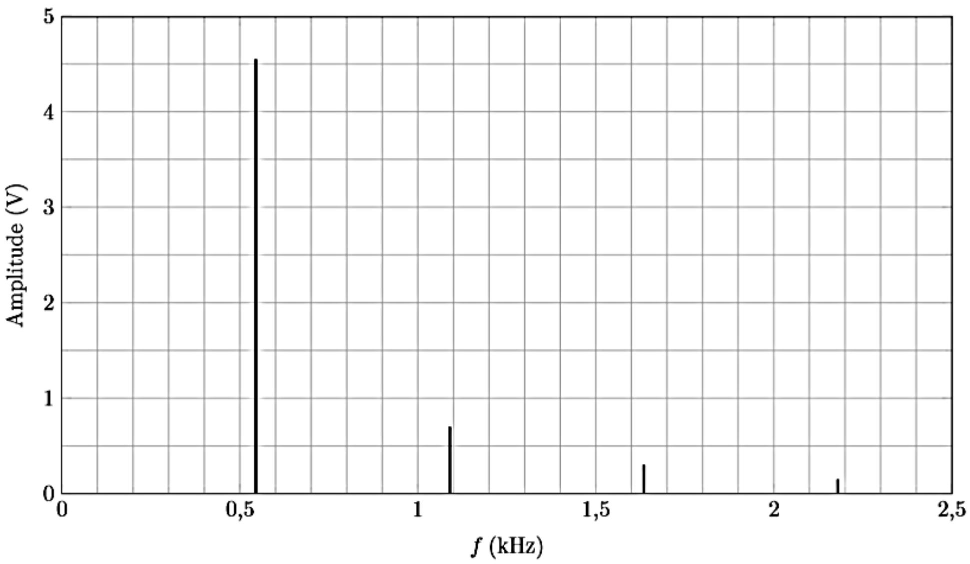

Figure 4 Analyse spectrale du son réalisée peu après la frappe du verre

Q 4. Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple ; laquelle ?

Q 5. Quelle caractéristique de la courbe de réponse du microphone est essentielle pour réaliser un enregistrement et une analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié ?

Q 6. Quelle(s) autre(s) information(s) peut-on déduire des différentes analyses spectrales ?

I.B – Estimation du facteur de qualité Q

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k, de longueur à vide nulle (figure 6). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de la masse m.

Q 7. Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ s'écrit de la façon suivante, avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de α, k et m :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

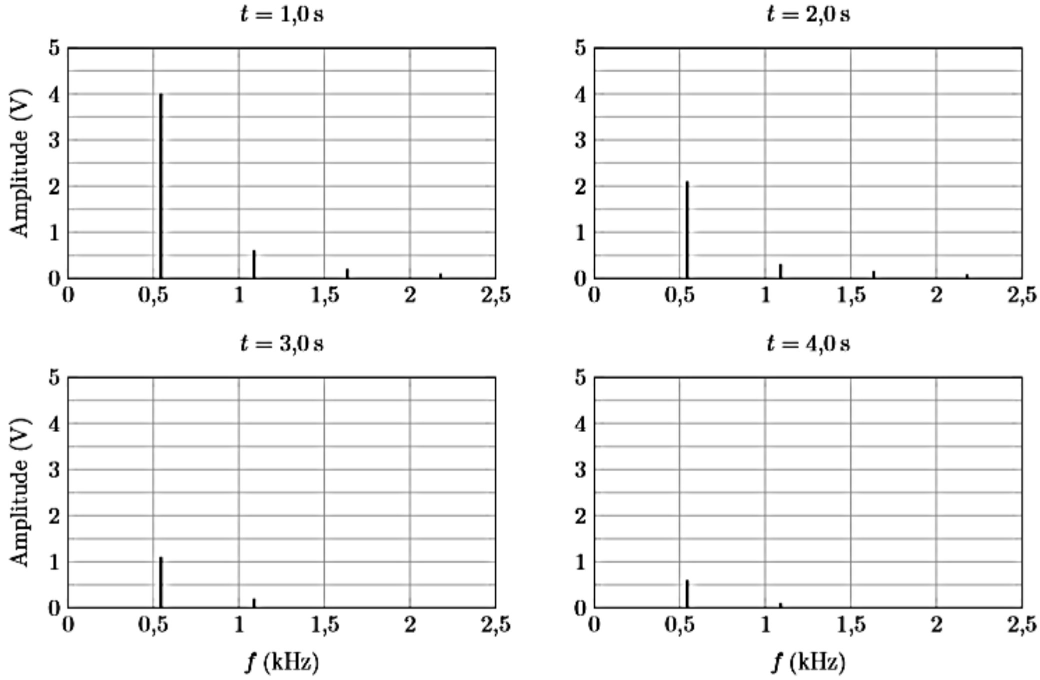

Figure 5 Analyse spectrale du son à différents instants après la frappe du verre

Figure 6 Modèle mécanique du déplacement

Q 8. Quelle est la signification physique de ω_0 et de Q ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?

Q 9. Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d'un frottement « faible », l'expression approchée de la solution $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V_0$. Représenter son allure.

(On pourra considérer le régime comme pseudopériodique)

Q 10. En quoi, l'enregistrement de la figure 3 est-il en accord à la modélisation par un frottement fluide ?

Q 11. Proposer, à partir de l'évolution temporelle du mode 1 sur les analyses spectrales, un ordre de grandeur du facteur de qualité Q.

Dans la suite de l'expérience, on va chercher à mettre en résonance le verre à l'aide d'une excitation sinusoïdale.

Q 12. Donner une estimation du temps nécessaire pour mettre le système en régime sinusoïdal forcé.

II Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un hautparleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f. Le verre, placé à proximité du hautparleur (figure 7), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

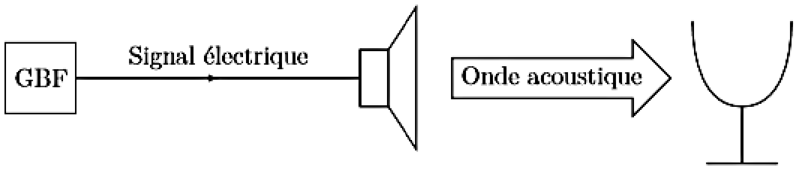

Figure 7

II.A – Approche théorique

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et Φ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A_0\cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X}\exp(j\omega t)$ avec $j^2 = -1$.

Q 13. Comment nomme-t-on la grandeur $\underline{X}$? Que représente son module, son argument ?

Q 14. Établir l'expression du module de $\underline{X}$ en fonction de ω, ω_0, A_0 et Q.

Q 15. À partir d'une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la figure 8 compatible avec le tracé du module de $\underline{X}$ en fonction de la pulsation ω.

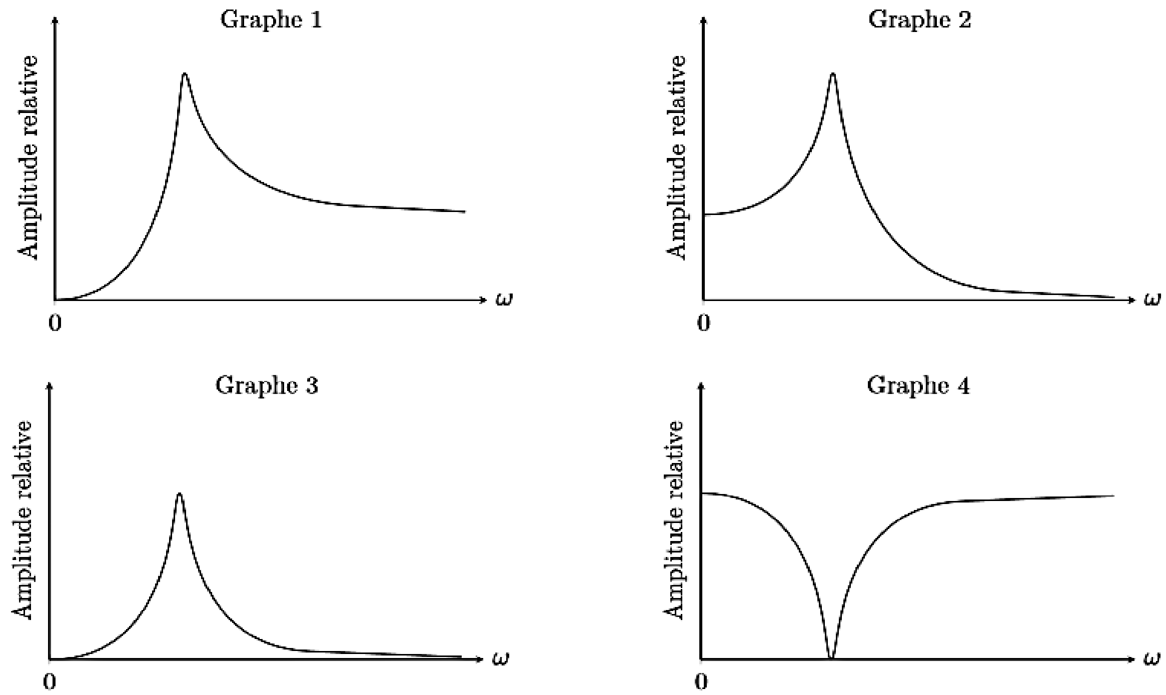

Figure 8 Module de $\underline{X}$ en fonction de ω

Q 16. À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d'amplitude ?
On note Q_0 cette condition.

Q 17. Dans le cas d'une résonance d'amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r en fonction de ω_0 et Q.

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.

Q 18. Quelle est alors l'expression de la pulsation de résonance ω_r ?

Q 19. On note X_r le module de $\underline{X}$ pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0, A_0 et Q.

Q 20. Définir les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de $\underline{X}$. Rappeler la relation liant ω_0, Q et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.