**CPGE ATS**

**Programme de colles – Semaine 13 (13 au 18 janvier 2025)**

**Chapitres étudiés et questions de cours :**

**M5 : Oscillations forcées et résonance**

**T4 : Réaction chimique (début)**

**Réponses attendues en bleu ou manuscrit.**

**1ère question de cours : questions 1 à 7.**

**2ème question de cours : questions 8 à 11.**

1) Donner l'amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ associées à la grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

### ■ Amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$

L'amplitude complexe temporelle $\underline{X(t)}$ associée à la grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est par définition

$$\underline{X(t)} = X_m e^{i(\omega t+\varphi)} \; ; \qquad \text{on a donc} \qquad X(t) = \mathcal{Re}(\underline{X(t)})$$

En pratique, pour retrouver les caractéristiques de la grandeur réelle, on utilise :

$$X_m = \left|\underline{X(t)}\right| \qquad \text{et} \qquad Arg\left(\underline{X(t)}\right) = \omega t + \varphi$$

### ■ Amplitude complexe $\underline{X_m}$

On pose $\underline{X(t)} = \underline{X_m} e^{i\omega t}$ soit $\underline{X_m} = X_m e^{i\varphi}$

On a alors $X_m = \left|\underline{X_m}\right|$ et $Arg\left(\underline{X_m}\right) = \varphi$

L'amplitude complexe $\underline{X_m}$ contient **l'ensemble des informations recherchées : l'amplitude** du signal recherché **est égale à son module et la phase à son argument.**

2) Donner les analogies électromécaniques, les définitions de l'impédance électrique et de l'impédance mécanique, ainsi que les impédances complexes des 3 dipôles R, L et C.

| **Mécanique** | **Electricité** |
|---|---|
| Elongation *x* (m) | Charge *q* (C) |
| Vitesse *v* ($m.s^{-1}$) | Intensité *i* (A) |

| | |
|---|---|
| Masse *m* (kg) | Inductance *L* (H) |
| Raideur *k* ($N.m^{-1}$) | $\frac{1}{C}$ avec Capacité *C* (F) |
| Frottement *h* ($N.m^{-1}.s$) | Résistance *R* ($\Omega$) |
| Force *F* (N) | Tension *u* (V) |

**Impédance complexe d'un dipôle** en convention récepteur en électrocinétique : $\underline{\boldsymbol{Z}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u}}}{\underline{\boldsymbol{i}}}$

**Impédances complexes de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{C}$ :**

$\boldsymbol{R}$ $\quad \underline{Z}_R = R$ $\qquad$ $\boldsymbol{L}$ $\quad \underline{Z}_L = \boldsymbol{jL\omega}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C}$ $\quad \underline{Z}_C = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{jC\omega}}$

**Impédance mécanique complexe** : $\underline{Z}_{méca} = \frac{\underline{\boldsymbol{F}}}{\underline{\boldsymbol{v}}}$

3) Donner l'expression mathématique de la décomposition en série de Fourier d'un signal $s(t)$ périodique de période $T$ ; définir les différents termes.

**Toute fonction $\boldsymbol{s(t)}$ périodique** de période $T$, de **fréquence** associée (**fréquence fondamentale**) $f_1 = \frac{1}{T}$ et de **pulsation** associée $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ peut être écrite ou décomposée sous la forme d'une **somme** (appelée **série de Fourier**) **de fonctions sinusoïdales de pulsations** $\omega_n$ **multiples de** $\omega_1$ :

$$\boldsymbol{s(t) = V_0 + V_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1) + V_2 cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \cdots + V_n cos(n\omega_1 t + \varphi_n) + \cdots}$$

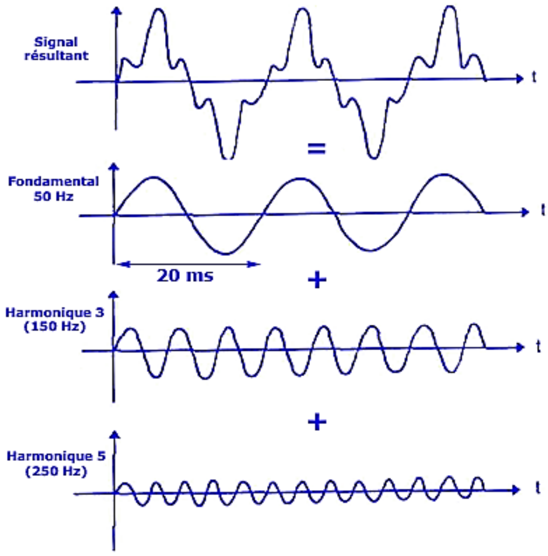
$$\boldsymbol{= V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k cos(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

Avec :

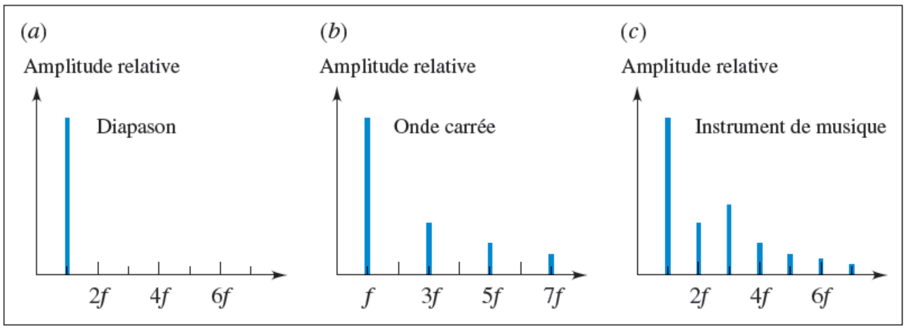
- Terme $V_0$ : **valeur moyenne du signal** $= < s(t) >$.

- Pulsation $\omega_1$ du signal périodique $s(t)$ : pulsation de la 1ère composante sinusoïdale (quand elle existe) = **harmonique de rang 1** ou **terme fondamental** ou **fondamental**. = période la plus grande visible

- Termes de la forme $V_k cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$ : **harmoniques de rang $k$** (ou **d'ordre $k$**)




4) Représenter l'allure du spectre d'une onde pure (sinusoïdale) liée à un diapason, d'une onde carrée, d'une onde liée à un instrument de musique.




5) Donner les allures des courbes de gain des principaux filtres et indiquer leur bande passante.

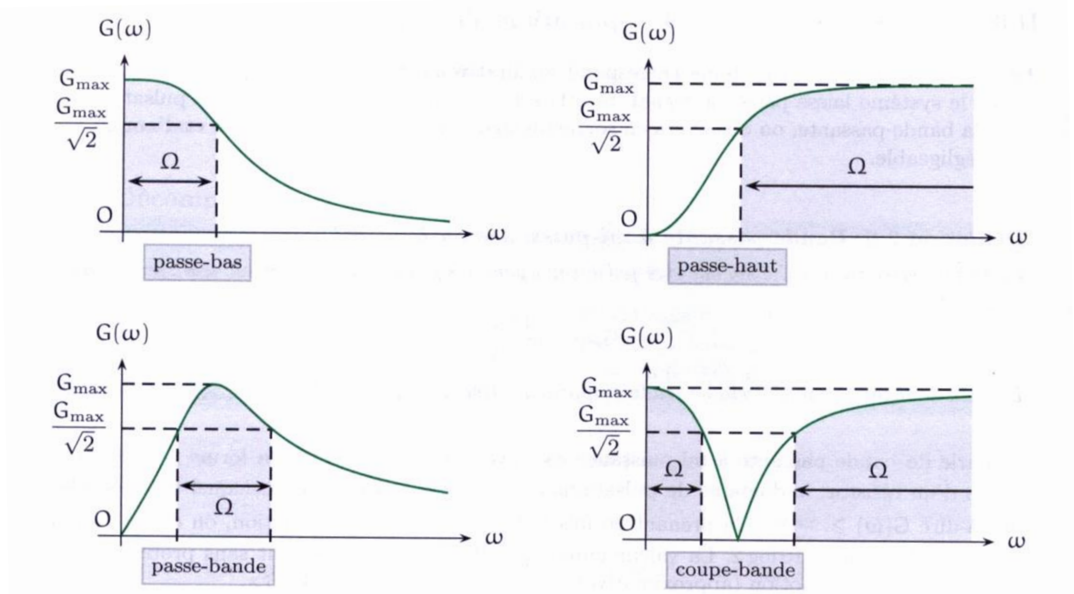



**FIG. 2.3. Gabarits des filtres classiques.** Les diagrammes représentés ne sont pas en échelle logarithmique, d'où l'absence d'asymptotes.

$\Omega$ = bande passante = intervalle de pulsations $\omega$

6) Ecrire et équilibrer les réactions chimiques suivantes :
   a) Les ions $\mathrm{Ag^+}$ réagissent avec le cuivre ($\mathrm{Cu}$) pour donner de l'argent ($\mathrm{Ag}$) et des ions $\mathrm{Cu^{2+}}$.
   b) Le butane ($\mathrm{C_4H_{10}}$) brûle dans le dioxygène ($\mathrm{O_2}$) pour donner du dioxyde de carbone ($\mathrm{CO_2}$) et de l'eau ($\mathrm{H_2O}$).

a) $\mathrm{2Ag^+ + Cu = 2Ag + Cu^{2+}}$ (Equilibre des éléments chimiques $\mathrm{Ag}$ et $\mathrm{Cu}$ et des charges)

b) $\mathrm{C_4H_{10}} + \frac{13}{2}\,\mathrm{O_2} = 4\,\mathrm{CO_2} + 5\mathrm{H_2O}$ (Equilibre des éléments chimiques $\mathrm{C}$ puis $\mathrm{H}$ puis $\mathrm{O}$)

7) Compléter le tableau d'avancement suivant, définir l'avancement de réaction $\xi$, la notion de proportions stœchiométriques et de réactif limitant.

$S_2O_8^{2-} \;+\; 3I^- \;=\; I_3^- \;+\; 2SO_4^{2-}$ $\qquad$ $S_2O_8^{2-} \;+\; 3I^- \;=\; I_3^- \;+\; 2SO_4^{2-}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E.I. (mol) | 1 | 3 | 0 | 0 | E.I. (mol) | 3 | 3 | 0 | 0 |
| E à *t* (mol) | | | | | E à *t* (mol) | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E.I. (mol) | 1 | 3 | 0 | 0 | E.I. (mol) | 3 | 3 | 0 | 0 |
| E à *t* (mol) | 1-ξ | 3-3ξ | ξ | 2 ξ | E à *t* (mol) | 3-ξ | 3-3ξ | ξ | 2 ξ |

Si réaction totale :

1-$\xi_{max}$ = 0 ou 3-3$\xi_{max}$ = 0 d'où :

$\xi_{max}$ = 1 mol

Les 2 réactifs ont disparu en fin de réaction.

Réactifs en **proportions stœchiométriques** (ou **mélange stoechiométrique**) : ces 2 réactifs arrivent à épuisement ensemble (si réaction est totale).

Si réaction totale :

3-$\xi_{max}$ = 0 ou 3-3$\xi_{max}$ = 0 d'où :

$\xi_{max}$ = 1 mol ($\xi_{max}$ = 3 mol impossible car quantité de $I^-$ insuffisante)

Le $I^-$ a disparu en fin de réaction : **réactif limitant.**

**Avancement de réaction $\xi$** = nombre de moles d'un réactif ou d'un produit de coefficient stœchiométrique 1 qui aurait été consommé ou produit.

8) Déterminer la Solution Particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,X_0\cos(\omega t)$$

Déterminer l'expression de l'amplitude réelle $X_m$ de la solution.

On cherche une Solution Particulière du type : $x(t) = X_m cos\,(\omega t + \varphi)$.
Passage aux complexes :

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\,\underline{\dot{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t) \qquad \Rightarrow -\omega^2\,\underline{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega\,\underline{x} + \omega_0^2\,\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)\,\underline{x} = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)\,X_m\exp(i\varphi)\exp(i\omega t) = \omega_0^2\,X_0\exp(i\omega t)$$

$$\Rightarrow\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)\,X_m\exp(i\varphi) = \omega_0^2\,X_0$$

On établit l'amplitude complexe de l'élongation :

$$\boxed{X_m\exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{\omega_0^2\,X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,i\omega + \omega_0^2\right)}}$$

On introduit la pulsation réduite : $\boldsymbol{u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}}$

En divisant Numérateur et Dénominateur par $\omega_0^2$, on obtient :

$$\boxed{X_m\exp(i\varphi) = \underline{X_M} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}}$$

On en déduit l'amplitude réelle du mouvement oscillant forcé :

$$X_M = \left|\underline{X_M}\right| = |X_m\exp(i\varphi)| = \left|\frac{X_0}{1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}}\right| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i\,\frac{u}{Q}\right|}$$

On obtient :
$$\boxed{\boldsymbol{X_M(u) = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}}}$$

9) **Résonance en élongation :** A partir de l'expression de l'amplitude de l'élongation $X_M$ en fonction de la pulsation réduite $u$ :

$$X_M = \frac{X_0}{\sqrt{(1-\ u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Déterminer la condition de résonance en élongation.
Tracer l'allure de la courbe $X_M$ en fonction de $u$.

On s'intéresse aux variations de $X_M$ avec $u$.

Le numérateur de $X_M$ est une constante positive, on peut donc simplifier l'étude en étudiant le dénominateur de $X_M$, et même le carré de celui-ci.

On définit $D(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$ ; de sorte que $X_M = \frac{X_0}{\sqrt{D(u)}}$

L'amplitude est alors maximale pour une fréquence telle que le dénominateur $D(u)$ est minimal.

Il faut donc chercher la pulsation réduite $u$ telle que $\frac{dD}{du} = 0$

$$\frac{dD}{du} = 2 \times (-2u) \times (1-u^2) + \frac{2}{Q}\ \frac{u}{Q} = 4u\left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

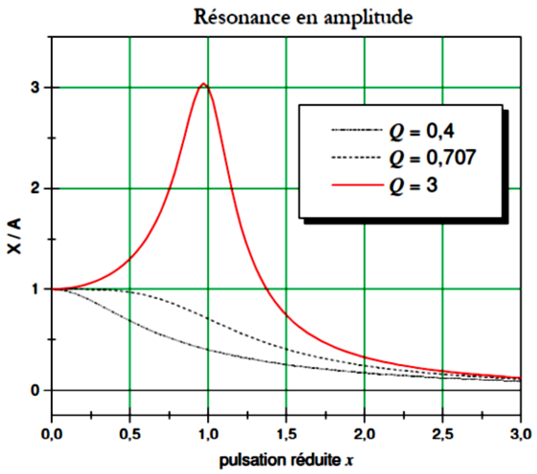
$$\frac{dD}{du} = 4\,u\left(u^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) = 0$$

$\frac{dD}{du}$ s'annule en $u = 0$ et, **éventuellement**, selon le signe de $1-\frac{1}{2Q^2}$, en $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ :

Si $1-\frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2Q^2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ impossible $\Leftrightarrow$ **Pas de résonance en élongation**

Si $1-\frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow 2Q^2 > 1 \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ alors $u = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ possible $\Leftrightarrow$ **Résonance en élongation**

- **Asymptote à basse fréquence : $\boldsymbol{u \ll 1}$** $X_M \sim X_0$
- **Asymptote à haute fréquence : $\boldsymbol{u \gg 1}$** $X_M \sim \frac{X_0}{u^2}$ *ou* $X_M \sim \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.X_0$ tend vers 0 lorsque $u \to \infty$




10) **Résonance en vitesse :** A partir de l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation $\underline{X}_M$ en fonction de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\boxed{X_m \exp(i\varphi) = \underline{X}_M = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right)}}$$

Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse $\underline{V}_M$.
Déterminer la condition de résonance en vitesse.
Tracer l'allure de la courbe $V_M$ en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

**Vitesse** : dérivée de la position du point par rapport au temps, soit : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

En **notation complexe** : $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{i\omega \underline{x}}$

**Amplitude complexe** de la vitesse : $\underline{V}_M = V_M \exp(i\varphi') = i\omega \underline{X}_M = i\omega X_m \exp(i\varphi)$

$$\underline{V}_M = i\omega \underline{X}_M = i\omega \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right)}$$

En divisant au numérateur et au dénominateur par $i\omega\omega_0$, en exploitant $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ , et en introduisant la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ :

$$\underline{V}_M = i\omega \underline{X}_M = i\omega \frac{\omega_0^2\, X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, i\omega + \omega_0^2\right)} = \frac{\omega_0 X_0}{i\frac{\omega}{\omega_0} 1 + \frac{1}{Q} - i\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$\boxed{\underline{V}_M(u) = V_M \exp(i\varphi') = \frac{\omega_0 X_0}{\frac{1}{Q} + i\left(u - \frac{1}{u}\right)} = \frac{\omega_0 X_0 Q}{1 + iQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}}$$

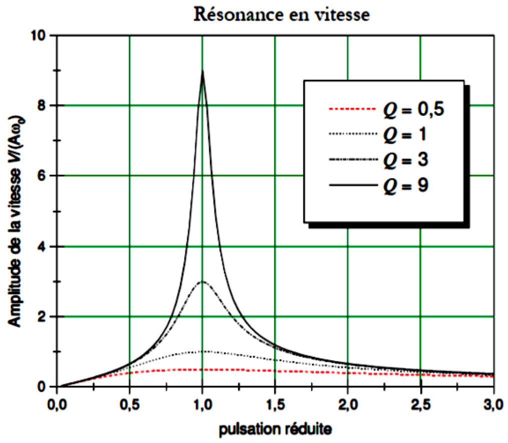
- Etude de la résonance en vitesse

$$V_M = \left|\underline{V_M}(u)\right| = \left|V_M \exp(i\varphi')\right| = \left|\frac{\omega_0 X_0 Q}{1 + iQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}\right| = \frac{\omega_0 X_0 Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

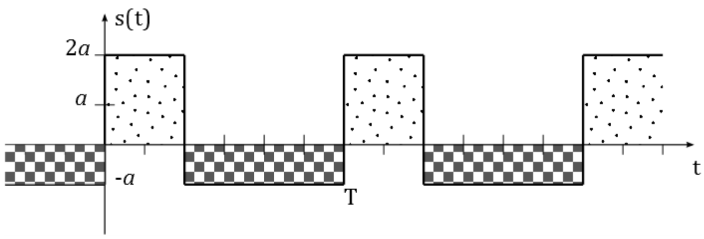
$V_M$ maximale pour $1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2$ minimale : solution évidente : $u = 1$ soit $\omega = \omega_0$

La **résonance en vitesse** a toujours lieu pour $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$

- **Asymptote à basse fréquence : $\boldsymbol{u \ll 1}$** $V_M \sim 0$
- **Asymptote à haute fréquence : $\boldsymbol{u \gg 1}$** $V_M \sim 0$




11) Calculer la valeur moyenne $\langle s(t)\rangle$ du signal suivant :




$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\left(2a.\frac{T}{3} - a.\frac{2T}{3}\right) = 0$$

**Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.**

**Programme ATS**

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|---|---|
| **13. Oscillations forcées** | |
| Régime sinusoïdal forcé | Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal.<br>Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant.<br>Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels.<br>Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude. |
| Analogies électromécaniques | Montrer que le modèle reste pertinent pour des systèmes mécaniques ou électriques où les équations décrivant le système sont données. |