MF1 STATIQUE DES FLUIDES / TD

Exercices de raisonnement

1. L'endroit le plus profond de l'Océan se situe au large des Philippines, avec une profondeur d'environ h = 10 km.
   a. Donner l'ordre de grandeur de la pression au fond de cette fosse.
   b. Qu'a-t-on négligé ?
   c. La pression réelle est-elle plus ou moins importante que l'estimation du a. ?

1. a. 10 km = 10.000 m
$z = 10.000$ m
$\rho g z \simeq 1000 \times 10 \times 10.000$
$\simeq 10^8$ Pa $= 1000$ bar.
b. Compressibilité de l'eau
$\rho(P) = \rho_0(1 + \alpha(P - P_0))$
$\rho \nearrow$ si $P \nearrow$
c. Plus importante.

2. Estimer la pression en haut du Mont Blanc.

2. $P = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ $H = 8,3$ km
$\left(H = \frac{RT_0}{Mg}\right)$
$z = 4,81$ km $\Rightarrow P \simeq 0,55\, P_0$

3. a. Estimer la force exercée par l'air à pression et température usuelles sur une vitre en verre de surface S = 1 m^2.
   b. Au poids de quelle masse posée sur une vitre horizontale cette force correspond-elle ?
   c. Pourquoi la vitre n'explose-t-elle pas ?

3. a. $F = p . S$
$= 10^5 \times 1\,m^2 = 10^5$ N
b. Si $g \simeq 10$, $P = mg$
$10^5 = 10^4 \times 10$
10^4 kg = 10 tonnes.
c. Pression de l'autre côté !

4. a) À la surface d'un récipient contenant de l'eau, la pression change de P_0 à $P_0 + \Delta P$. Que dire du changement de pression dans l'eau ?

b) Commenter l'expérience dite du tonneau de Pascal. Un tonneau est percé de manière à être surmonté par une fine colonne d'eau. On ajoute un tout petit peu d'eau dans la colonne (fig. 35). Que va-t-il se passer ?

c) Un récipient contenant de l'eau possède deux ouvertures de sections très différentes $S_2 >> S_1$ fermées par des pistons (Fig. 36). Que se passe-t-il si on applique une force $\overrightarrow{f_1}$ sur le piston de surface S_1 ?

1. a. P augmente de ΔP partout.

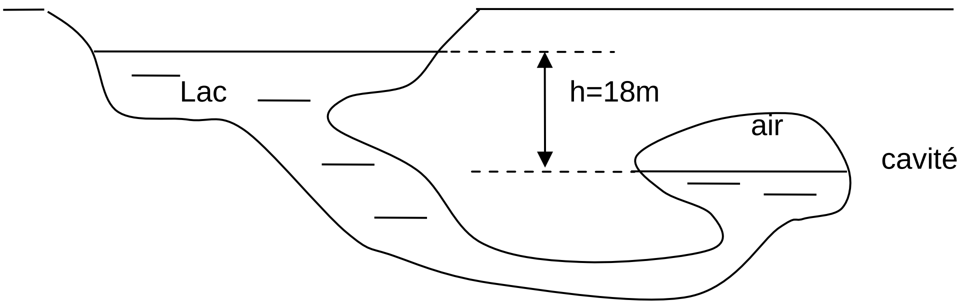
b. $h \Rightarrow \rho g h$.

c. $\Delta P = \dfrac{f_1}{S_1}$

$$\Rightarrow f_2 = \Delta P . S_2 = f_1 \frac{S_2}{S_1} >> f_1$$

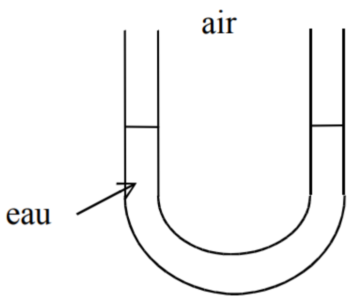
Exercice 1 : Cavité souterraine

Le sondage d'une région, propice à la spéléologie, indique la présence d'une cavité souterraine partiellement remplie d'eau et ayant approximativement la forme suivante :



Que vaut la pression de l'air enfermé dans la cavité ?

Exercice 2 : Tube en U



Dans un tube en U de section $1cm^2$, on place de l'eau comme l'indique le schéma ci-dessous :

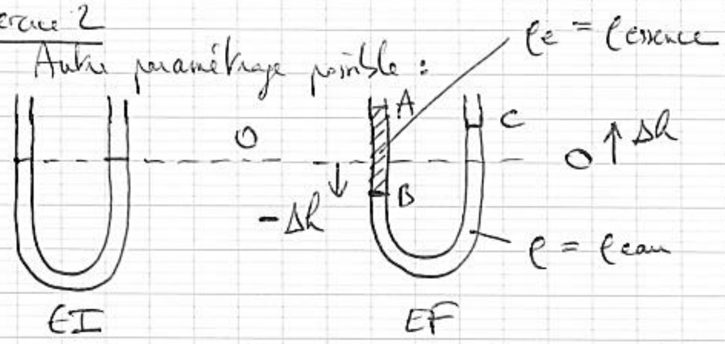
On ajoute dans la partie gauche du tube 20 cm^3 d'essence de masse volumique 0,8 g/cm^3 non miscible à l'eau.

De combien se déplace le niveau de l'eau dans la partie droite ?

Données : L'eau a une masse volumique $\rho=1000kg/m^3$ et $g=9,8m/s^2$.

Exercice 2

Autre paramétrage possible :



En ajoutant de l'essence à gauche, le niveau à droite monte de Δh, mais descend à gauche de Δh

$z_C - z_B = 2\Delta h$

$$p_B = p_{Bas} = p_A + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) \quad (1) \text{ (essence)}$$

$$= p_C + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B) \quad (2) \text{ (eau)}$$

$(1) - (2) = 0$

$$p_A + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) = p_C + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

$$\cancel{p_{atm}} + \rho_e \cdot g \cdot (z_A - z_B) = \cancel{p_{atm}} + \rho \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

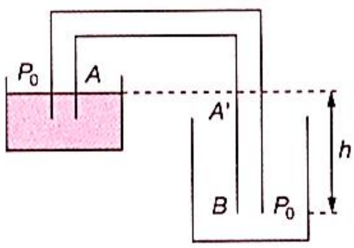
$$\rho_e \cdot \cancel{g} \cdot \frac{V_e}{S} = \rho \cdot \cancel{g} \cdot 2\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\rho_e}{\rho} \cdot \frac{V_e}{2S}$$

$$\text{cm} \leftarrow \Delta h = d_e \cdot \frac{V_e}{2S} = 0{,}8 \times \frac{20 \ (\text{cm}^3)}{2 \times 1 \ (\text{cm}^2)}$$

$$\Delta h = 8 \text{ cm}$$

Exercice 3 : Fonctionnement d'un siphon



Un siphon peut être représenté comme un tube en U à l'envers dans un récipient (ci-contre).

a) Le siphon a été amorcé, c'est-à-dire qu'on l'a rempli d'eau en aspirant en B. En supposant qu'il y a équilibre, relier les pressions en A et B. On notera h la distance entre B et A'.

b) Expliquer pourquoi l'équilibre n'est pas possible.

c) Que se passe-t-il et jusqu'à quand ?

Exercice 3

a) $P_B = P_A + \rho g h$

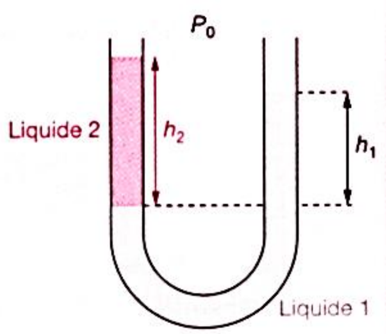
b) $P_B = P_{atm}$ et $P_A = P_{atm}$

$\Rightarrow$ impossible

c) Écoulement jusqu'à ce que $h_B = h_A$.

Exercice 4 : Tube en U (2)

Le tube en U représenté ci-contre contient deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2. Ces deux liquides sont en contact avec l'air libre à la pression P_0.



a) Exprimer la masse volumique ρ_2 en fonction de ρ_1, h_1 et h_2.

b) Quel est le liquide le plus dense ?

c) Que dire du principe des vases communicants ?

Exercice 4

a) $\cancel{P_0} + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_1 g h_1$ (Pression à la frontière entre 1 et 2).

$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$

b) $h_1 < h_2 \Rightarrow \rho_2 < \rho_1$

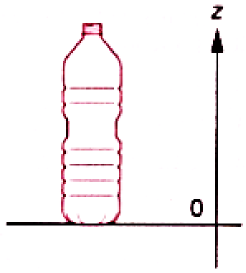
$\Rightarrow$ liquide 1 plus dense

c) 1 seul liquide !!

Exercice 5 : Evolution de la pression dans un récipient

Une bouteille plastique de hauteur h = 30 cm est ouverte et remplie d'air (Ci-contre). En z=0, la pression est P_{atm}. Le système est à l'équilibre à la température T_0.

a) Rappeler quelle est la loi d'évolution de la pression dans la bouteille.



b) En déduire $\alpha = \frac{P(h)-P(0)}{P(0)}$, variation relative de la pression dans la bouteille.

On donne : T_0 = 25 °C, masse molaire de l'air M = 29 g.mol^{-1}, constante des gaz parfaits R = 8,3 J.K^{-1}.mol^{-1}, le champ de gravité g = 9,8 m.s^{-2}.

c) En appliquant directement la relation de statique des fluides incompressibles, estimer à nouveau α. Trouve-t-on un résultat similaire ? Pourquoi ?

d) Au final, peut-on parler de « la pression » du gaz dans la bouteille ?

a) $p(z) = p_{atm} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

b) $\alpha = \frac{p(z) - p_{atm}}{p_{atm}} = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$

$= \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ $H = \frac{RT_0}{Mg}$

$\simeq -3,4.10^{-5}$

c) $dP = -\rho g\, dz = -\rho_0 g dz$

avec $\rho_0 = \frac{p_{atm} M}{RT_0}$

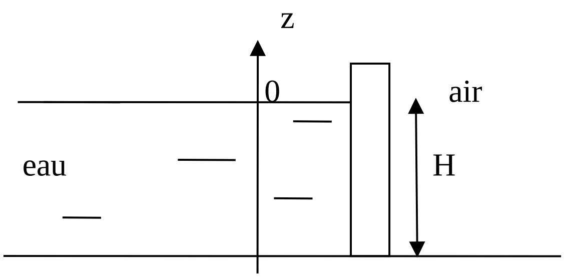
$\alpha = -\frac{Mgz}{RT_0}$ D.L. de b)

Dvp. limité !

ρ ne varie pas sur 30 cm !

Exercice 6 : Barrage

Un mur de barrage a le profil suivant :

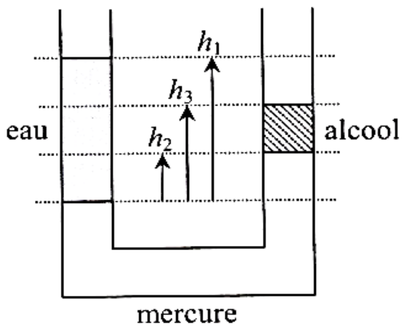


Hauteur immergée H = 25m sur une largeur L = 300m.
Données : masse volumique de l'eau ρ = 1000kg/m^3 et g = 9,8m/s^2.

a) Exprimer la pression à la profondeur z (z<0).
b) En considérant une bande de largeur L et de hauteur dz (infiniment petite) située à la côte z, calculer la force de pression infinitésimale dF qui s'exerce de la part de l'eau sur cette bande.
c) En déduire la force totale exercée par l'eau sur l'ouvrage et la force résultante si on tient compte de l'air situé de l'autre côté du barrage.

Exercice 7 : Équilibre de trois liquides non miscibles

1. Montrer, à partir de l'équation locale de la statique des fluides, que la pression est une fonction affine de l'altitude z dans un liquide incompressible.



2. Un système de trois liquides incompressibles non miscibles (eau, mercure, alcool) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. On note respectivement ρ_1, ρ_2 et ρ_3 les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool. Calculer ρ_3 en fonction de ρ_1, ρ_2, h_1, h_2 et h_3.

A.N. : h_1 = 0,80 m, h_2 = 0.050 m, h_3 = 0.20 m, $\rho_1 = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_2 = 1{,}4.10^4\ kg.m^{-3}$

1. $\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0 g$

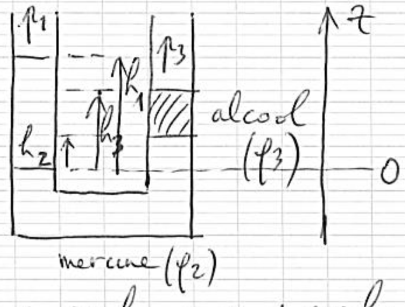
Par intégration : $\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0 g = cte$

$\Rightarrow p(z) = -\rho_0 g z + p_0$

2.

$h_0 = 0$

eau (ρ_1)



$$\begin{cases} p_0 + \rho_1 g h_0 = p_1 + \rho_1 g h_1 & (1) \quad (\text{Eau}) \\ p_0 + \rho_2 g h_0 = p_2 + \rho_2 g h_2 & (2) \quad (\text{Mercure}) \\ p_2 + \rho_3 g h_2 = p_3 + \rho_3 g h_3 & (3) \quad (\text{Alcool}) \\ p_1 = p_3 = p_{atm} \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow p_1 = p_0 - \rho_1 g h_1 \quad (4)$

$(3) \Rightarrow p_3 = p_2 + \rho_3 g h_2 - \rho_3 g h_3 \quad (5)$

$(4) - (5) \Rightarrow 0 = p_0 - p_2 - \rho_1 g h_1 - \rho_3 g h_2 + \rho_3 g h_3$

Or : $(2) \Rightarrow 0 = p_0 - p_2 = \rho_2 g h_2$

d'où :

$0 = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 - \rho_3 g h_2 + \rho_3 g h_3$

$0 = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 + \rho_3 g (h_3 - h_2)$

$$\boxed{\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}} = 0{,}67.10^3\ kg.m^{-3}$$

Exercice 8 : Modèles d'atmosphère

L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M. On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol ($z = 0$), la pression est P_0 et la température T_0.

1. On suppose que la température de l'atmosphère est uniforme. À partir de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude z. On introduira une hauteur caractéristique H du phénomène.

2. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude z selon la loi $T(z) \;=\; T_0 — \lambda z$ (avec $\lambda > 0$).

   a) Montrer que la pression à l'altitude z est de la forme $P(z) = P_0\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$.

   b) Calculer, dans ce modèle, la pression au sommet de l'Everest (8850 m).

3. Pour $z << H$, montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

On donne :

M = 29 g.mol^{-1}, g = 9,8 m.s^{-2}, P_0 = 1,0 bar, T_0 = 310 K et λ = 5,0.10^{-3} K.m^{-1}

1. $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{m}{V} g$ isotherme

$PV = nRT_0 \Rightarrow V = \frac{nRT_0}{P}$

$\frac{dP}{dz} = -\frac{mPg}{nRT_0} = -\frac{MPg}{RT_0}$

$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$

$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz$ $\left(\ln P - \ln P_0 = \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} z \right)$

$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$

2.a) $T(z) = T_0 - \lambda z$ Non isotherme

$$pV = nR(T_0 - \lambda z)$$

$$V = \frac{nR(T_0 - \lambda z)}{p}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{R(T_0 - \lambda z)}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} dz = \int_0^z -\frac{Mg}{R}(T_0 - \lambda z)^{-1} dz$$

$$= \frac{Mg}{\lambda R}\left[\ln(T_0 - \lambda z) - \ln T_0\right]$$

$\alpha \ln a = \ln(a^\alpha)$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\lambda R} \ln\left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right] = \ln\left[\left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right]^{\frac{Mg}{\lambda R}}\right]$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right]^{\frac{Mg}{\lambda R}}$$

$$p = p_0\left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\lambda R}}$$ avec $\frac{Mg}{\lambda R} = \frac{T_0}{\lambda H}$

car $\frac{RT_0}{Mg} = H$.

d'où : $p = p_0\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$

2) b) $p = 1{,}0 \times \left(1 - \frac{5.10^{-3}}{310} \times 8850\right)^{\frac{310}{5.10^{-3} \times 9053}}$

$$H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{8{,}3 \times 310}{29.10^{-3} \times 9{,}8} = 9053 \text{ m}$$

$p = 0{,}35$ bar

3) $z \ll H$

$\Rightarrow$ Développement limité ordre 1

Modèle 1 : $e^x \simeq 1 + x$

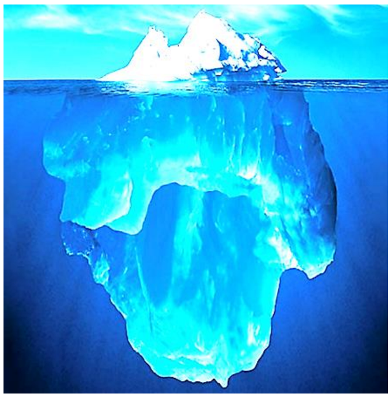
$$p \simeq p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Modèle 2 : $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$

$$p \simeq p_0\left(1 - \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{T_0}} \frac{\cancel{T_0}}{\cancel{\lambda} H} z\right)$$

$$\simeq p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

Exercice 9 : La partie émergée de l'iceberg



Considérons un iceberg de volume total V flottant sur l'eau. Soit v le volume de la partie émergée.

Déterminer le rapport $\frac{v}{V}$.

On donne les masses volumiques respectives de l'eau, de la glace et de l'air :

$\rho_e = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_g = 0{,}9.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_a = 1\ kg.m^{-3}$

Partie émergée déplace v d'air
Partie immergée déplace $V - v$ d'eau.

Poussée d'Archimède :

$$\vec{F}_A = -[\rho_a v + \rho_e (V - v)]\vec{g}$$

PFD : $\vec{P} + \vec{F}_A = \vec{0}$

$$\rho_g V \cancel{\vec{g}} - [\rho_a v + \rho_e (V - v)]\cancel{\vec{g}} = \vec{0}$$

$$\rho_g V - \rho_a v - \rho_e V + \rho_e v = 0$$

$$V(\rho_g - \rho_e) = -v(\rho_e - \rho_a)$$

$$V(\rho_e - \rho_g) = v(\rho_e - \cancel{\rho_a})$$

$$\frac{v}{V} = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e} \simeq 0{,}1 = 10\%$$