

## MF2 MECANIQUE DES FLUIDES / TD 1

### Exercice 1

Soit le champ de vitesse  $\vec{V} = \frac{V_0}{L} \cdot (x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y)$

Où  $V_0$  et  $L$  sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence  $div(\vec{V})$  et son rotationnel  $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$

### Exercice 2

Soit le champ de vitesse  $\vec{V} = \frac{V_0}{L} \cdot (-y \cdot \vec{u}_x + x \cdot \vec{u}_y)$

Où  $V_0$  et  $L$  sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence  $div(\vec{V})$  et son rotationnel  $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$

### Exercice 3 (\*)

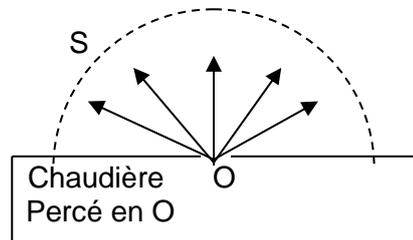
Soit le champ de vitesse  $\vec{V} = V_0 \cdot L \cdot \left( \frac{x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y}{x^2 + y^2} \right)$

Où  $V_0$  et  $L$  sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence  $div(\vec{V})$  et son rotationnel  $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$

### Exercice 4

Sur la surface plane horizontale d'une chaudière, un orifice laisse échapper de la vapeur d'eau dans toutes les directions comme l'indique la figure ci-dessous :



Le débit massique de la source, qui est ici l'orifice O, est  $D_m$ . On suppose que la vapeur est incompressible caractérisé par sa masse volumique  $\rho$  et l'écoulement stationnaire.

On appelle S la demi-sphère de centre O et de rayon  $r$ .

Exprimer le vecteur vitesse en un point de S en fonction de  $D_m$ ,  $\rho$  et  $r$ .

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

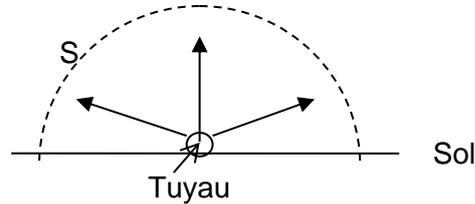
$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \right] \cdot \vec{u}_r + \left[ \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \right] \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\theta) - \left( \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \right] \cdot \vec{u}_z$$

### Exercice 5

Un tuyau d'arrosage rectiligne est posé sur le sol horizontal. Il est percé sur une longueur  $L$  de minuscules orifices ce qui permet d'envoyer de l'eau au dessus du sol dans toutes les directions orthogonales au tuyau :

Vue en coupe dans un plan  
Orthogonale au tuyau



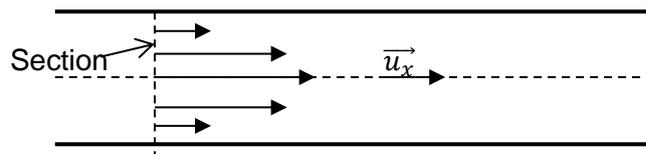
Le débit massique d'eau sur la longueur  $L$  est  $D_m$  : ici le tuyau joue le rôle de source qui n'est pas ponctuelle (comme dans l'exercice précédent) mais distribué en longueur. On assimilera l'écoulement à un écoulement d'eau incompressible de masse volumique  $\rho$  qui baigne tout l'espace surplombant le tuyau.

On appelle  $S$  la surface du demi cylindre de longueur  $L$  de rayon  $r$  centré sur le tuyau. Exprimer le vecteur vitesse en un point de  $S$  en fonction de  $D_m$ ,  $\rho$ ,  $L$  et  $r$ .

### Exercice 6

Dans un tuyau cylindrique de rayon  $R$  s'écoule de manière stationnaire de l'huile : fluide incompressible visqueux, ce qui conduit à une répartition de vitesse non uniforme dans chaque section du tuyau :

Vue en coupe du tuyau :



Dans une section du tuyau, le champ de vitesse  $\vec{v}$  de l'huile dépend de la distance  $r$  à l'axe du tuyau sous la forme :  $\vec{v} = v_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot \vec{u}_x$ .

Exprimer le débit volumique  $Dv$  en fonction  $v_0$  et  $R$ .

### Exercice 7 : Tornade (\*) (E. Thibierge)

Le champ des vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par

$$\vec{v}(r) = \omega r \vec{e}_\theta \text{ si } r \leq a$$

$$\vec{v}(r) = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta \text{ si } r \geq a$$

avec  $\omega$  et  $K$  deux constantes.

1. Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer  $K$ .
2. Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction  $v(r)$  puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.
3. Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.
4. Cet écoulement est-il tourbillonnaire ?

### Exercice 8 : Houle (\*\*) (E. Thibierge)

La hauteur d'eau de la houle peut être modélisée comme une sinusoïde :

$$h = h(x) = H \cos(\omega t - kx)$$

associée au champ de vitesse dans l'eau :

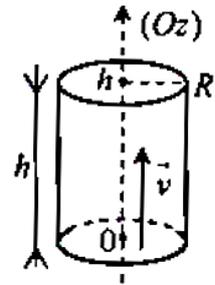
$$\vec{v}(x, y, z) = H\omega e^{kz} [\cos(kx - \omega t) \vec{u}_x + \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z]$$

où l'axe  $x$  est sa direction de propagation et l'axe  $z$  un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde  $k$  est relié à la longueur d'onde la houle par  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

1. De quel type d'onde s'agit-il ? Dans quelle direction se propage-t-elle ?
2. Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant  $t = 0$  en  $x = 0$  (qui correspond au sommet d'une vague),  $x = \frac{\lambda}{4}$  et  $x = \frac{\lambda}{2}$  (creux d'une vague).
3. L'écoulement est-il compressible ou non ?
4. L'écoulement est-il tourbillonnaire ou irrotationnel ?

### Exercice 9 : Ecoulement du sang dans une artère

Le sang, qui est ici assimilé à un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\eta$ , s'écoule dans une artère modélisée par un cylindre vertical de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . On se place en régime laminaire permanent. La vitesse du fluide est de la forme :  $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{e}_z$ . En  $z = h$  la pression est prise égale à  $P_1$  et en  $z = 0$  elle vaut  $P_1 + \rho gh + \Delta P$ , où  $\Delta P$  est la surpression imposée par le cœur à la base du cylindre, permettant l'écoulement du fluide malgré la viscosité.



1. Appliquer le PFD au fluide contenu dans un cylindre de rayon  $r$  inférieur à  $R$  et de hauteur  $h$ , sachant que l'on est en régime permanent. Pour fixer le signe de la force de cisaillement subie par le fluide, on remarquera que  $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$ , la vitesse étant nulle sur la paroi de l'artère en  $r = R$ . En déduire  $\frac{\partial v}{\partial r}$  puis  $v(r)$ .
2. En déduire le débit massique  $D_m$  en fonction de  $\Delta P$  et des autres données (loi dite de Poiseuille).
3. Calculer  $\Delta P$  dans une artère de longueur  $h = 0,50$  m, de rayon  $R = 4,0$  mm, où le débit massique du sang est  $D_m = 5,0 \cdot 10^{-2}$  kg.s<sup>-1</sup>. La masse volumique du sang sera prise égale à  $\rho = 1,0 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et la viscosité dynamique à  $\eta = 4,0 \cdot 10^{-3}$  Pa.s.
4. Le rayon de l'artère est divisé par 2,  $\Delta P$  étant donné, par quel facteur est divisé le débit massique de sang ?

### Exercice 10 : Le pas de patineur (\*)

Le déplacement d'un skieur de fond est permis par une fine couche d'eau liquide sous le ski générée par la fonte des cristaux de neige sous l'effet des frottements au contact de la semelle du ski. Pour simplifier, nous considérerons que cette couche liquide est d'épaisseur constante. Le skieur de masse  $m$  évolue sur le plan horizontal  $(O, x, y)$ . Sous le ski, la couche de fluide d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$ , située dans l'intervalle  $0 \leq z \leq e$ , est mise en mouvement par les skis. L'écoulement dans le fluide est supposé stationnaire et la vitesse est supposée de la forme  $\vec{v} = v(z) \cdot \vec{e}_x$ . On suppose que le fluide au contact de la semelle a la même vitesse  $V$  que le ski. L'eau est un fluide visqueux de viscosité dynamique.

1. En appliquant le PFD projeté suivant  $(Ox)$  à une tranche de fluide d'épaisseur  $z$  située entre 0 et  $z$ , justifier que le régime permanent amène à la relation :  $\frac{dv}{dz} = cte$ . En déduire

le profil de vitesses  $v(z)$  dans le fluide et tracer son allure dans la couche de fluide. On notera  $V$  la vitesse du skieur supposée permanente dans cette question.

2. En supposant l'expression de la vitesse du fluide  $v(z)$  toujours valable ici, étudier le mouvement du skieur et déterminer sa vitesse  $V(t)$  en fonction du temps. À  $t = 0$  on donne :  $\frac{dx}{dt}(0) = V_0$ . Exprimer le temps caractéristique  $\tau$  de la décroissance de la vitesse  $V(t)$  du skieur en fonction de  $e, S, \eta$  et  $m$ .

Calculer  $\tau$  avec  $e = 8\mu\text{m}$ ,  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $m = 60 \text{ kg}$  et  $S = 0,05 \text{ m}^2$  (on note que la surface effective de contact entre les skis et la neige est très inférieure à la surface des semelles des skis).

Pour valider l'hypothèse de régime permanent pour la vitesse dans la tranche de fluide, évaluer le temps  $\tau'$  caractéristique de l'évolution du fluide en utilisant la masse d'eau  $m'$  en mouvement sous le ski. Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .  
Conclusion.

3. L'épaisseur de la couche de fluide est en réalité liée à la puissance des forces de viscosité. Nous supposons pour simplifier que la quantité de chaleur ainsi dégagée lors d'un déplacement  $dx$  du ski est intégralement utilisée pour provoquer la fusion de la neige sur la largeur  $L$ , l'épaisseur  $e$  et la longueur  $dx$ . En déduire l'épaisseur  $e$  en fonction de la chaleur latente massique de fusion de la neige  $L_{fus}$ , la vitesse du skieur  $V$ , la surface  $S, \eta, \rho$  et  $L$ .