FORMULAIRE MECANIQUE DES FLUIDES

Force de pression subie par une particule sur sa frontière :

$$\overrightarrow{dF_S} = p.\overrightarrow{dS} = p.dS.\vec{n}$$

Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\overrightarrow{grad}(p) = \rho\vec{g}$$

$\frac{dp}{dz} = -\rho.g$ si z orienté vers le haut (verticale ascendante)

$\frac{dp}{dz} = +\rho.g$ si z orienté vers le bas (verticale descendante)

Relation Fondamentale de la Statique des Fluides **incompressibles** ($\rho = cte$) :

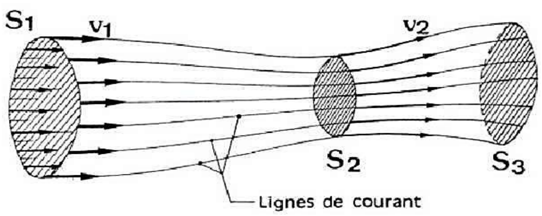
$$p_{bas} = p_{haut} + \rho.g.h$$

$p_1 + \rho.g.z_1 = p_2 + \rho.g.z_2$ (si axe z orienté vers le haut)

$p_1 - \rho.g.z_1 = p_2 - \rho.g.z_2$ (si axe z orienté vers le bas)

Ligne de courant : Ligne orientée tangente (en chacun de ses points) à la vitesse eulérienne à la date t.

Tube de courant : Ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Vecteur **densité de courant de masse** $\overrightarrow{j_M}(M,t)$:

$$\overrightarrow{j_M}(M,t) = \rho(M,t).\vec{v}(M,t)$$

Unités : ρ masse volumique du fluide en kg.m^{-3}

$v = \|\vec{v}\|$ en m.s^{-1}

$j_M = \|\overrightarrow{j_M}\|$ **en kg.m^{-3}. m.s^{-1} = kg.s^{-1}.m^{-2}**

Débit massique D_M à travers une surface (Σ) :

$$D_M(M,t) = \frac{dm}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \overrightarrow{j_M}(M,t).\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma \rho(M,t).\vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}$$ Unité : kg.s^{-1}

Débit volumique D_V à travers une surface (Σ) :

$$D_V(M,t) = \frac{dV}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}$$ Unité : m^3.s^{-1}

Equation locale de conservation de la masse :

$$\boldsymbol{div}(\overrightarrow{\boldsymbol{J_M}}) + \frac{\boldsymbol{\partial\rho}}{\boldsymbol{\partial t}} = \mathbf{0} \text{ (cas général)}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial j_M}}{\boldsymbol{\partial x}} + \frac{\boldsymbol{\partial\rho}}{\boldsymbol{\partial t}} = \mathbf{0} \text{ (à une dimension)}$$

Ecoulement **compressible / incompressible :**

$div(\vec{v}) \neq 0$: Ecoulement compressible

$div(\vec{v}) = 0$: Ecoulement incompressible

Ecoulement **rotationnel / irrotationnel :**

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) \neq \vec{0}$: Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$: Ecoulement irrotationnel

Fluide parfait : fluide dont l'écoulement se fait **sans perte (sans frottement)**. Seules les forces de pression interviennent au sein du fluide => Profil de vitesses **uniforme**.

Fluide newtonien ou **fluide visqueux :** il y des pertes (frottements) lors de l'écoulement => Profil de vitesses **non uniforme.**

Relation de Bernoulli pour un fluide en écoulement stationnaire et incompressible, sans machine hydraulique et sans perte, sur une ligne de courant :

$$\frac{\boldsymbol{p_s}}{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v_s}^2 + \boldsymbol{g.z_s} = \frac{\boldsymbol{p_e}}{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v_e}^2 + \boldsymbol{g.z_e} \qquad (1) \qquad \text{Unités : J.kg}^{-1}$$

$$\boldsymbol{p_s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho v_s}^2 + \boldsymbol{\rho g z_s} = \boldsymbol{p_e} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho v_e}^2 + \boldsymbol{\rho g z_e} \qquad (2) \qquad \text{Unités : Pa ou J.m}^{-3}$$

$$\boldsymbol{D_m}\left(\frac{\boldsymbol{p_s}}{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v_s}^2 + \boldsymbol{g.z_s}\right) = \boldsymbol{D_m}\left(\frac{\boldsymbol{p_e}}{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v_e}^2 + \boldsymbol{g.z_e}\right) \qquad (3) \qquad \text{Unités : W}$$

p_e , p_s : pressions du fluide en entrée , sortie (Pa)

v_e , v_s : vitesses du fluide en entrée , sortie du système ($m.s^{-1}$)

z_e , z_s : altitudes du fluide en entrée , sortie du système ($m.s^{-1}$)

ρ : masse volumique du fluide (incompressible) ($kg.m^{-3}$)

g : accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$)

D_m : débit massique lors de l'écoulement **stationnaire** ($kg.s^{-1}$)

D_v : débit volumique lors de l'écoulement **stationnaire incompressible** ($kg.m^{-3}$)

Relation de Bernoulli pour un fluide en écoulement stationnaire et incompressible, avec machine hydraulique et avec perte de charge, sur une ligne de courant :

$$\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2{}^2+gz_2\right)=\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1{}^2+gz_1\right)+E_{m\,mach}-E_{m\,ch} \quad \textbf{(1)}$$

Unités : $J.kg^{-1}$

$E_{m\,mach}$: Energie massique utile de la machine hydraulique ($J.kg^{-1}$), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$E_{m\,ch}$: Pertes de charge massique lors de l'écoulement ($J.kg^{-1}$)

$$\left(p_2+\frac{1}{2}\rho v_2{}^2+\rho g z_2\right)=\left(p_1+\frac{1}{2}\rho v_1{}^2+\rho g z_1\right)+E_{v\,mach}-E_{v\,ch} \quad \textbf{(2)}$$

Unités : Pa ou $J.m^{-3}$

$E_{v\,mach}$: Energie volumique utile de la machine hydraulique ($J.m^{-3}$)), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$E_{v\,ch}$: Pertes de charge volumiques lors de l'écoulement ($J.m^{-3}$)

$$D_m.\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2{}^2+gz_2\right)=D_m.\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1{}^2+gz_1\right)+P_{mach}-P_{ch} \quad \textbf{(3)}$$

Unités : W

P_{mach} : Puissance utile de la machine hydraulique (W)), > 0 si pompe, < 0 si turbine

P_{ch} : Pertes de charge lors de l'écoulement (W)

$$\left(\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2{}^2}{2g}+z_2\right)=\left(\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1{}^2}{2g}+z_1\right)+H_{mach}-z_{ch} \quad \textbf{(4)}$$

Unités : mCF, mètre de colonne de fluide

H_{mach} : Puissance utile de la machine hydraulique exprimée en mCF, > 0 si pompe, < 0 si turbine

P_{ch} : Pertes de charge lors de l'écoulement, en mCF