CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 15 (27 janvier au 1er février 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

MF1 : Statique des fluides **MF2 : Mécanique des fluides (début)**

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : 3 questions du formulaire méca flu ci-dessous (questions 1 à 11).

2ème question de cours : questions 12 à 16

Rappel : les expressions de la divergence et du gradient doivent être connues, en coordonnées cartésiennes. Elles sont fournies en coordonnées cylindriques.

$f(x,y,z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x,y,z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z$

On introduit le “vecteur” nabla : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div}\,\vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base : $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(a_z)}{\partial\theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z}\right].\vec{u_r} + \left[\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r}\right].\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r.a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial\theta}\right].\vec{u_z}$$

1) Force de pression subie par une particule sur sa frontière :

$$\overrightarrow{dF_S} = p.\overrightarrow{dS} = p.dS.\vec{n}$$

2) Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\overrightarrow{grad}(p) = \rho\vec{g}$$

$\frac{dp}{dz} = -\rho.g$ si z orienté vers le haut (verticale ascendante)

$\frac{dp}{dz} = +\rho.g$ si z orienté vers le bas (verticale descendante)

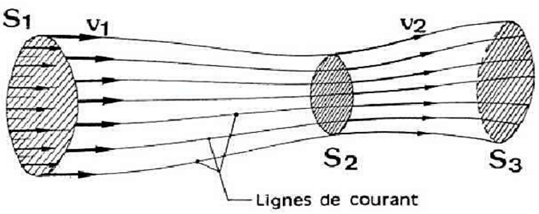
3) Relation Fondamentale de la Statique des Fluides **incompressibles** ($\rho = cte$) :

$$p_{bas} = p_{haut} + \rho.g.h$$

$p_1 + \rho.g.z_1 = p_2 + \rho.g.z_2$ (si axe z orienté vers le haut)

$p_1 - \rho.g.z_1 = p_2 - \rho.g.z_2$ (si axe z orienté vers le bas)

4) **Ligne de courant** : Ligne orientée tangente (en chacun de ses points) à la vitesse eulérienne à la date t.
5) **Tube de courant** : Ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



6) Vecteur **densité de courant de masse** $\vec{j_M}(M,t)$:

$$\vec{j_M}(M,t) = \rho(M,t).\vec{v}(M,t)$$

Unités : ρ masse volumique du fluide en kg.m^{-3}

$v = \|\vec{v}\|$ en m.s^{-1}

$j_M = \|\vec{j_M}\|$ **en kg.m^{-3}. m.s^{-1} = kg.s^{-1}.m^{-2}**

7) **Débit massique D_M** à travers une surface (Σ) :

$$D_M(M,t) = \frac{dm}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \overrightarrow{J_M}(M,t).\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma \rho(M,t).\vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}$$ Unité : $kg.s^{-1}$

8) **Débit volumique D_V** à travers une surface (Σ) :

$$D_V(M,t) = \frac{dV}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}$$ Unité : $m^3.s^{-1}$

9) Equation locale de conservation de la masse :

$$div(\overrightarrow{J_M}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (cas général)}$$

$$\frac{\partial j_M}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (à une dimension)}$$

10) Ecoulement **compressible / incompressible :**

$div(\vec{v}) \neq 0$: Ecoulement compressible

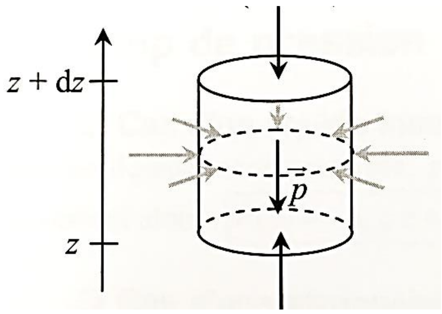
$div(\vec{v}) = 0$: Ecoulement incompressible

11) Ecoulement **rotationnel / irrotationnel :**

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) \neq \vec{0}$: Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$: Ecoulement irrotationnel

12) Statique des fluides : A partir d'un Bilan des Actions Mécaniques Extérieures sur un l'élément de fluide ci-contre, établir l'expression de la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides.



Elément de volume d'axe vertical, de section *dS* et de hauteur *dz* :

Hypothèse : *dz* << *z*

$\rho(z)$ masse volumique à l'altitude *z*

$\rho(z) = cte$ dans le cyclindre

$p(z)$ pression à l'altitude *z*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) s'exerçant sur le cylindre :

- Poids du cylindre :

$$\overrightarrow{dP} = dm.\vec{g} = \rho.dV.\vec{g} = -\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z}$$

- Les forces de pression sur les surfaces latérales se compensent
- Forces de pression sur les surfaces haute et basse :

$$\overrightarrow{dF_S}(z) = p(z).dS.\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{dF_S}(z+dz) = -p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z}$$

- Principe Fondamental de la Statique :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF_S}(z) + \overrightarrow{dF_S}(z+dz) = \vec{0}$$
$$-\rho.dS.dz.g.\overrightarrow{e_z} + p(z).dS.\overrightarrow{e_z} - p(z+dz).dS.\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$$

- Projection sur l'axe *z* :

$$-\rho.dz.g + p(z) - p(z+dz) = 0$$
$$p(z+dz) - p(z) = -\rho.g.dz$$
$$dp = -\rho.g.dz$$

- Différenciation :

$$\frac{dp}{dz}.dz = -\rho.g.dz$$

$\boldsymbol{\frac{dp}{dz} = -\rho.g}$ **Relation Fondamentale des la statique des Fluides (pour axe z gradué vers le haut)**

13) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho.g$, établir l'expression de la pression p en fonction de l'altitude z dans le cas d'un liquide incompressible.

Fluide incompressible = Fluide dans lequel la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ est indépendante de la pression $\boldsymbol{p}$ et de l'altitude $\boldsymbol{z}$.

Hypothèse : $\boldsymbol{\rho = constante = \rho_0}$

$$\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0.g$$

On intègre :

$$p(z) = -\rho_0.g.z + cte$$

Condition aux Limites (C.L.) :

$$p(0) = cte = p_0$$

D'où :

$$\boldsymbol{p(z) = -\rho_0.g.z + p_0}$$

Ou on intègre par variables séparées :

$$dp = -\rho_0.g.dz$$

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_0^z -\rho_0.g.dz$$

$$[p]_{p_0}^{p} = -\rho_0.g.[z]_0^z$$

$$\boldsymbol{p - p_0 = -\rho_0.g.z}$$

Autres écritures possibles :

$$\boldsymbol{p_1 + \rho . g . z_1 = p_2 + \rho . g . z_2}$$

$$\boldsymbol{p_{bas} = p_{haut} + \rho . g . h}$$

avec $\boldsymbol{\rho} = constante$ (fluide incompressible)

14) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho . g$, établir l'expression de la pression p en fonction de l'altitude z dans le cas d'un gaz parfait isotherme. Définir la hauteur caractéristique H et vérifier l'homogénéité du résultat.

Hypothèse : $\boldsymbol{T = constante = T_0}$

$pV = nRT$ d'où : $V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT_0}{p}$

Masse volumique du gaz : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT_0} = \frac{Mp}{RT_0}$ avec $M = \frac{m}{n}$ masse molaire du gaz

$\frac{dp}{dz} = -\rho . g$ devient :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{RT_0} = -\frac{Mg}{RT_0} p$$

En séparant les variables :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

Intégration par variables séparées :

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT_0} dz = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz$$

$$[lnp]_{p_0}^{p} = -\frac{Mg}{RT_0} [z]_0^z$$

$$lnp - lnp_0 = ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} z$$

$$\boxed{\boldsymbol{p = p_0 . \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right) = p_0 . \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}}$$

avec $\boldsymbol{H = \frac{RT_0}{Mg}}$ **Hauteur caractéristique**

Homogénéité :

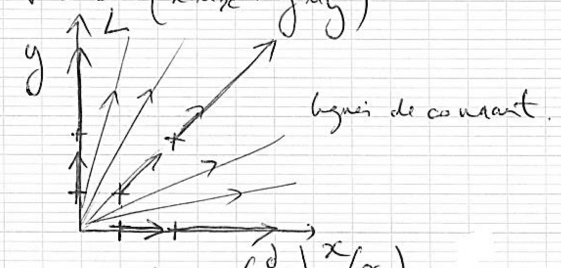
$$[H] = \left[\frac{RT_0}{Mg}\right] = \left[\frac{mRT_0}{Mmg}\right] = \left[\frac{nRT_0}{mg}\right] = \frac{J}{N} = \frac{N.m}{N} = m$$

15) Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L} . (x . \vec{u}_x + y . \vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Conclure.

1. $\vec{V} = \frac{V_0}{L}\left(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y\right)$



$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = 2\frac{V_0}{L}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$$

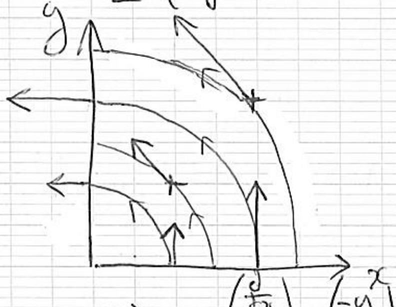
Écoulement divergent $\Rightarrow$ Compressible.
Écoulement non rotationnel $\Rightarrow$ non tourbillonnaire

16) Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}.(-y.\vec{u}_x + x.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Conclure.

$\vec{V} = \frac{V_0}{L}\cdot\left(-y\,\vec{u}_x + x\cdot\vec{u}_y\right)$



$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = 0$$

Champ de vitesse à flux conservatif

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1+1\end{pmatrix} = \frac{2V_0}{L}\,\vec{u}_z$$

Écoulement non divergent ⇒ incompressible
Écoulement rotationnel ⇒ tourbillonnaire

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Description d'un fluide statique	
Échelle mésoscopique	Définir et connaitre des ordres de grandeurs des dimensions de l'échelle mésoscopique dans le cas des liquides et des gaz.
Pression dans un fluide Forces surfaciques, forces volumiques	Citer des ordres de grandeur de la pression. Définir la force de pression. Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Champ de pression Relation de la statique des fluides	Donner l'expression de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide. Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible pour l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un capteur de pression.**

2. Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire	
Grandeurs eulériennes Champ des vitesses Ligne de courant, tube de courant Régime stationnaire	Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes. **Analyser des vidéos, des simulations ou des cartographies.** Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses.
Débit volumique et débit massique	Exprimer les débits volumique et massique. Définir le vecteur densité de flux de masse.
Écoulement stationnaire dont le champ des masses volumiques est uniforme	Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire. Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses est à flux conservatif. Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à flux conservatif.
Écoulement stationnaire et irrotationnel	Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à circulation conservative.
Divergence.	Utiliser le théorème d'Ostrogradski fourni. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel	Utiliser le théorème de Stokes fourni. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.