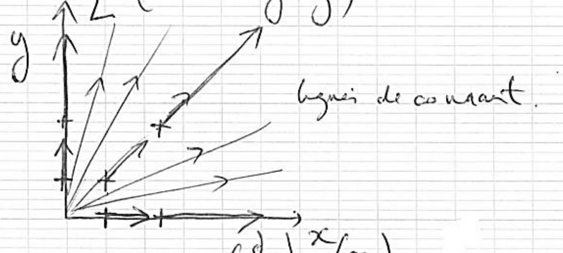
Exercice 1

Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}.(x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$

1. $\vec{V} = \frac{V_0}{L}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$



$$div\ \vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = 2\frac{V_0}{L}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$$

Ecoulement divergent ⇒ Compressible

Ecoulement non rotationnel ⇒ non tourbillonnaire

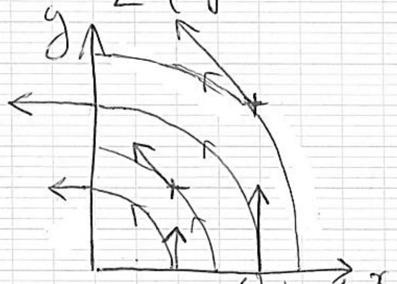
Exercice 2

Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}.(-y.\vec{u}_x + x.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$

$$\vec{V} = \frac{V_0}{L}.\left(-y\,\vec{u}_x + x.\vec{u}_y\right)$$



$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Champ de vitesse à flux conservatif

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{2V_0}{L}\,\vec{u}_z$$

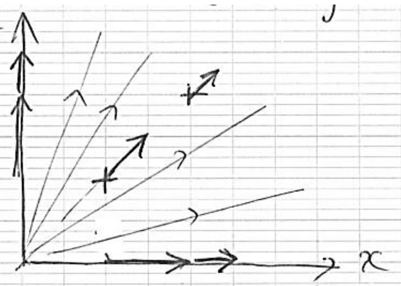
Écoulement non divergent ⇒ incompressible
Écoulement rotationnel ⇒ tourbillonnaire

Exercice 3 (*)

Soit le champ de vitesse $\vec{V} = V_o.L.(\frac{x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y}{x^2+y^2})$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$



$$\operatorname{div}\vec{v} = V_0 L \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] V_0 L$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= V_0 L \left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Champ des vitesses à flux conservatif $\leftarrow$

$$= 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = V_0 L \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = V_0 L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix}$$

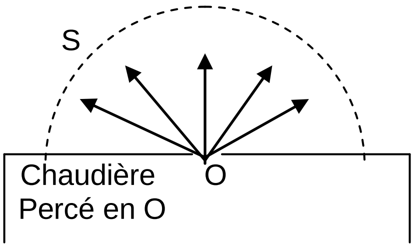
$$= V_0 L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{y\,2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x\,2y}{(x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Ecoulement non divergent $\Rightarrow$ incompressible
Ecoulement irrotationnel $\Rightarrow$ non tourbillonnaire
Présence d'une "source" au point O.

Exercice 4

Sur la surface plane horizontale d'une chaudière, un orifice laisse échapper de la vapeur d'eau dans toutes les directions comme l'indique la figure ci-dessous :



Le débit massique de la source, qui est ici l'orifice O, est D_m .On suppose que la vapeur est incompressible caractérisé par sa masse volumique ρ et l'écoulement stationnaire.
On appelle S la demi-sphère de centre O et de rayon r.
Exprimer le vecteur vitesse en un point de S en fonction de D_m , ρ et r.

(Voir exercice 5)

$\vec{v} = v_r.\vec{u_r}$ en coordonnées sphériques.

$\vec{v}$ et $\vec{dS}$ colinéaires.

$$D_m = \iint_S \rho.\vec{v}.\vec{dS} = \iint_S \rho.v.dS$$

ρ = cte (incompressibilité)

v = cte sur un rayon r.

$$D_m = \rho v \iint_S dS = \rho v \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Surface } 1/2 \text{ sphère}}$$

$$D_m = \rho v 2\pi r^2$$

$$v = \frac{D_m}{\rho 2\pi r^2}$$

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base : $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$

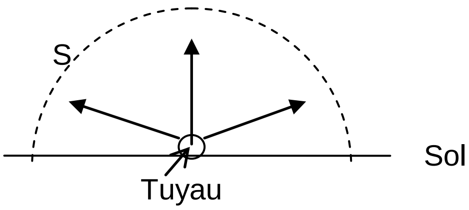
$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z}\right].\overrightarrow{u_r} + \left[\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r}\right].\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r.a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta}\right].\overrightarrow{u_z}$$

Exercice 5

Un tuyau d'arrosage rectiligne est posé sur le sol horizontal. Il est percé sur une longueur L de minuscules orifices ce qui permet d'envoyer de l'eau au dessus du sol dans toutes les directions orthogonales au tuyau :

Vue en coupe dans un plan
Orthogonale au tuyau



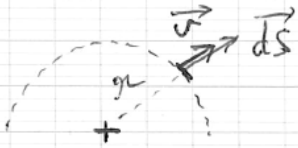
Le débit massique d'eau sur la longueur L est D_m : ici le tuyau joue le rôle de source qui n'est pas ponctuelle (comme dans l'exercice précédent) mais distribué en longueur. On assimilera l'écoulement à un écoulement d'eau incompressible de masse volumique ρ qui baigne tout l'espace surplombant le tuyau.
On appelle S la surface du demi cylindre de longueur L de rayon r centré sur le tuyau.
Exprimer le vecteur vitesse en un point de S en fonction de D_m , ρ, L et r .

Eau incompressible de masse volumique ρ constante.
Débit massique à travers la surface S :

$$D_M = \iint_S \rho.\vec{v}.\vec{dS} = \iint_S \rho.v.dS$$

car $\vec{v}$ et $\vec{dS}$ colinéaires

En considérant la vitesse v constante sur toute la surface S :



$$D_M = \rho.v.\iint_S dS$$

$$= \rho.v.S$$

$$= \rho.v.\underbrace{L.\pi.r}_{\text{Surface } 1/2 \text{ cylindre}}$$

D'où : $\boxed{v = \dfrac{D_M}{\rho.L.\pi.r}}$

(4) Par la divergence :

Eau incompressible (ρ = cte)

$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

Or : $\vec{v} = v_r.\vec{u_r}$ (v "radiale")

en coordonnées cylindriques.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.v_r) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $r \to \infty$

(ou)

$$\frac{\partial}{\partial r}(r.v_r) = 0$$

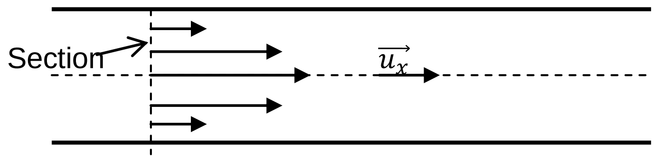
$r.v_r = K$ $\qquad$ $\boxed{v_r = v = \dfrac{K}{r}}$

K à déterminer.

Exercice 6

Dans un tuyau cylindrique de rayon *R* s'écoule de manière stationnaire de l'huile : fluide incompressible visqueux, ce qui conduit à une répartition de vitesse non uniforme dans chaque section du tuyau :

Vue en coupe du tuyau :

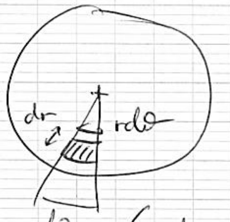


Dans une section du tuyau, le champ de vitesse $\vec{v}$ de l'huile dépend de la distance r à l'axe du tuyau sous la forme : $\vec{v} = v_o.\left(1 - (\frac{r}{R})^2\right).\overrightarrow{u_x}$.

Exprimer le débit volumique Dv en fonction v_o et *R*.

Débit tuyau cylindrique

$$D_v = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$



Coordonnées cylindriques

Vitesse max au centre

$$= \iint_S v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)dS$$

Vitesse nulle sur les bords

$$= \iint_S v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)dr\, r\, d\theta$$

$$= v_0\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r\, dr$$

$$= v_0\, 2\pi \times \int_0^{R} v_0 \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

$$= v_0\, 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R$$

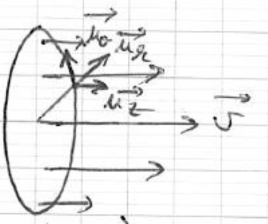
$$= v_0\, 2\pi \left[\frac{R^2}{2} - 0 - \frac{R^4}{4R^2} + 0\right]$$

$$= v_0\, 2\pi \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right]$$

$$\boxed{D_v = v_0 \frac{\pi R^2}{2}}$$

$$\left(D_v = v_0 \pi R^2 \text{ si } v = v_0 \text{ partout}\right)$$

$$\vec{v} = v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right).\vec{u_x}$$



* Coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right).\vec{u_z}$$

$$= \underbrace{0}_{v_r}.\vec{u_r} + \underbrace{0}_{v_\theta}.\vec{u_\theta} + \underbrace{v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{v_z}\vec{u_z}$$

On a donc : $v_r = 0$

$v_\theta = 0$ en coordonnées cylindriques

$v_z = \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$

* $\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z)$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.0) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(0) + \frac{\partial}{\partial z}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$= 0$$

Fluide (écoulement) non compressible.

* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}(0)\right].\vec{u_r}$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(0) - \frac{\partial}{\partial r}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right].\vec{u_\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r.0) - \frac{\partial}{\partial\theta}(0)\right].\vec{u_z}$$

$$= \frac{2r}{R^2}\vec{u_\theta} \neq \vec{0}$$

Fluide (écoulement) rotationnel / tourbillonnaire.

<u>Exercice 7 : Tornade (*)</u> (E. Thibierge)

Le champ des vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par

$\vec{v}(r) = \omega r \vec{e}_\theta$ si $r \leq a$

$\vec{v}(r) = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta$ si $r \geq a$

avec ω et K deux constantes.

1. Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer K.
2. Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction $v(r)$ puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.
3. Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.
4. Cet écoulement est-il tourbillonnaire ?

Donnée : en coordonnées sphériques et pour un champ $\vec{A} = \vec{A}(r)$ ne dépendant que de r,

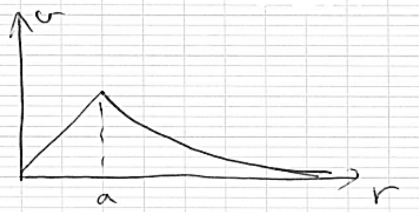
- ▷ $\operatorname{div} \vec{A} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (r A_r)}{\partial r}$
- ▷ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} = -\dfrac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$

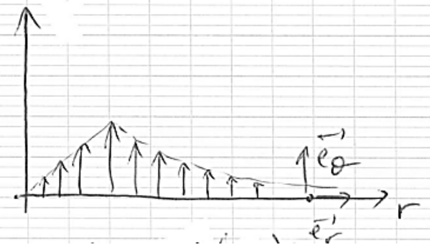
$$\vec{v}(r) = \begin{cases} \omega r \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{K}{r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

1. En a : $\omega a = \frac{K}{a}$

$K = \omega a^2$

2.





3) $\underline{r \leq a}$ $\vec{v}(r) = \omega r . \vec{e_\theta}$ $\left| \begin{array}{l} v_r = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \right.$

$= v_\theta . \vec{e_\theta}$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$

$$= 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\omega r) + 0$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Non compressible.

$\underline{r \geq a}$ $\vec{v}(r) = \frac{K}{r} . \vec{e_\theta}$ $\left| \begin{array}{l} v_r = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \right.$

$= v_\theta . \vec{e_\theta}$

De même :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{K}{r}\right) + 0$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Non compressible.

4) $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega r)\right] . \vec{e_r}$ $\underline{r \leq a}$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(0) - \frac{\partial}{\partial r}(0)\right] . \vec{e_\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r \omega r) - \frac{\partial}{\partial \theta}(0)\right] . \vec{e_z}$$

$$= \frac{1}{\cancel{r}} . 2\cancel{r}\omega . \vec{e_z} = 2\omega \vec{e_z}$$

Tourbillonnaire dans le coeur.

$\underline{r \geq a}$. De même :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\frac{K}{\cancel{r}}\right)\vec{e_z} = \vec{0}$$

Non tourbillonnaire hors du coeur

Exercice 8 : Houle (**) (E. Thibierge)

La hauteur d'eau de la houle peut être modélisée comme une sinusoïde :

$$h = h(x) = Hcos(\omega t - kx)$$

associée au champ de vitesse dans l'eau :

$$\vec{v}(x,y,z) = H\omega e^{kz}[\cos(kx - \omega t)\,\vec{u}_x + sin(kx - \omega t)\vec{u}_z]$$

où l'axe x est sa direction de propagation et l'axe z un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde k est relié à la longueur d'onde la houle par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

1. De quel type d'onde s'agit-il ? Dans quelle direction se propage-t-elle ?
2. Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ (qui correspond au sommet d'une vague), $x = \frac{\lambda}{4}$ et $x = \frac{\lambda}{2}$ (creux d'une vague).
3. L'écoulement est-il compressible ou non ?
4. L'écoulement est-il tourbillonnaire ou irrotationnel ?

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$h = h(x) = H\cos(\omega t - kx)$

$\vec{v}(x,y,z) = H\omega e^{kz}\left[\cos(kx-\omega t)\vec{u_x} + \sin(kx-\omega t)\vec{u_z}\right]$

1. Onde progressive qui se propage dans le sens des x croissants.

2. $t = 0$ $x = 0$

$\vec{v} = H\omega e^{kz}\vec{u_x}$

$x = \lambda/4$

$\vec{v} = H\omega e^{kz}\vec{u_z}$

$x = \lambda/2$

$\vec{v} = -H\omega e^{kz}\vec{u_x}$

3. $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

$= -Hk\omega e^{kz}\sin(kx-\omega t)$

$+ 0$

$+ Hk\omega e^{kz}\sin(kx-\omega t)$

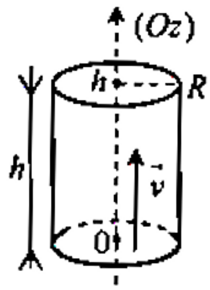
$= 0$ <u>incompressible</u>

4. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} H\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t) \\ 0 \\ H\omega e^{kz}\sin(kx-\omega t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ Hk\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t) - Hk\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t) \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$

<u>irrotationnel</u>

Exercice 9 : Ecoulement du sang dans une artère



Le sang, qui est ici assimilé à un fluide incompressible de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η , s'écoule dans une artère modélisée par un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h. On se place en régime laminaire permanent. La vitesse du fluide est de la forme : $\vec{v} = v(r).\vec{e}_z$. En $z = h$ la pression est prise égale à P_1 et en $z = 0$ elle vaut $P_1 + pgh + \Delta P$, où ΔP est la surpression imposée par le cœur à la base du cylindre, permettant l'écoulement du fluide malgré la viscosité.

1. Appliquer le PFD au fluide contenu dans un cylindre de rayon r inférieur à R et de hauteur h, sachant que l'on est en régime permanent. Pour fixer le signe de la force de cisaillement subie par le fluide, on remarquera que $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$, la vitesse étant nulle sur la paroi de l'artère en $r = R$. En déduire $\frac{\partial v}{\partial r}$ puis $v(r)$.
2. En déduire le débit massique D_m en fonction de ΔP et des autres données (loi dite de Poiseuille).
3. Calculer ΔP dans une artère de longueur h = 0,50 m, de rayon R = 4.0 mm, où le débit massique du sang est D_m = 5,0.10^{-2} kg.s^{-1}. La masse volumique du sang sera prise égale à ρ = 1,0.10^{3} kg.m^{-3} et la viscosité dynamique à η = 4,0.10^{-3} Pa.s.
4. Le rayon de l'artère est divisé par 2, ΔP étant donné, par quel facteur est divisé le débit massique de sang ?

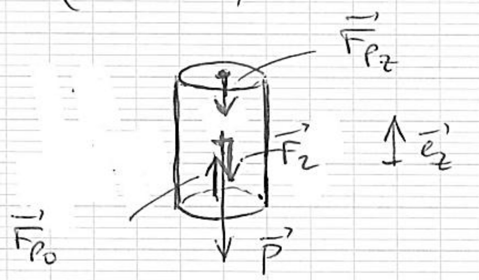
Bilan des forces

1. Force de cisaillement :

$$\vec{F_2} = \eta \, S \underbrace{\frac{\partial v}{\partial r}}_{<0} \vec{e_z}$$

$$\vec{F_2} = \eta \, 2\pi r h \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e_z}$$

Bilan des forces sur le cylindre de rayon r en régime permanent ($v = cte$).



$\vec{P}$: poids du sang dans le cylindre.

$$\vec{P} = -mg\vec{e_z} = -\rho V g \vec{e_z} = -\rho \pi r^2 h g \vec{e_z}$$

$\vec{F}_{P_0}$: force de pression à $z = 0$.

$$\vec{F}_{P_0} = +P_0 S \vec{e_z} = +(P_1 + \rho g h + \Delta P)\pi r^2 \vec{e_z}$$

$\vec{F}_{Ph}$: force de pression à $z = h$

$$\vec{F}_{Ph} = -P_h S \vec{e_z} = -P_1 \pi r^2 \vec{e_z}$$

$$\vec{F_2} = \eta \, 2\pi r h \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e_z}$$

1 $\sum \vec{F} = \vec{0}$ en régime permanent

$$-\rho \pi r^2 l g + (p_1 + \rho g l + \Delta P)\pi r^2 - p_1 \pi r^2 + \eta\, 2\pi r l \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$-\rho \pi r^2 l g + \cancel{p_1 \pi r^2} + \rho g l \pi r^2 + \Delta P \pi r^2 - \cancel{p_1 \pi r^2} + \eta\, 2\pi r l \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\Delta P . r + \eta\, 2 l \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

1 $$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\Delta P . r}{2 l \eta}$$

1 $$v(r) = -\frac{\Delta P}{4 l \eta} r^2 + cte$$

Condition aux limites : $v(R) = -\frac{\Delta P}{4 l \eta} R^2 + cte = 0$

1 $$cte = +\frac{\Delta P}{4 l \eta} R^2$$

1 $$v(r) = \frac{\Delta P}{4 l \eta}(R^2 - r^2)$$

2. $$D_m = \int_0^R \rho v(r) 2\pi r\, dr = \frac{\Delta P 2\pi}{4 l \eta}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi \rho R^4 \Delta P}{8 \eta l}$$

3.a) $$\Delta P = \frac{8 \eta l D_m}{\pi \rho R^4} = \frac{8 \times 4.10^{-3} \times 0,50 \times 5.10^{-2}}{\pi \times 1,0.10^3 \times (4.10^{-3})^4} \simeq 1.10^3 \text{ Pa} = 0,01 \text{ bar}$$

Exercice 10 : Le pas de patineur (*)

Le déplacement d'un skieur de fond est permis par une fine couche d'eau liquide sous le ski générée par la fonte des cristaux de neige sous l'effet des frottements au contact de la semelle du ski. Pour simplifier, nous considérerons que cette couche liquide est d'épaisseur constante.
Le skieur de masse m évolue sur le plan horizontal (O, x, y). Sous le ski, la couche de fluide d'épaisseur e et de surface S, située dans l'intervalle $0 \leq z \leq e$, est mise en mouvement par les skis. L'écoulement dans le fluide est supposé stationnaire et la vitesse est supposée de la forme $\vec{v} = v(z).\overrightarrow{e_x}$. On suppose que le fluide au contact de la semelle a la même vitesse V que le ski. L'eau est un fluide visqueux de viscosité dynamique.

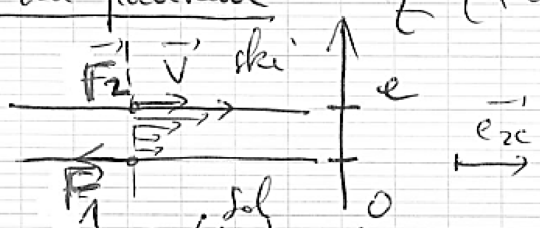
1. En appliquant le PFD projeté suivant (Ox) à une tranche de fluide d'épaisseur z située entre 0 et z, justifier que le régime permanent amène à la relation : $\frac{dv}{dz} = cte$.

En déduire le profil de vitesses $v(z)$ dans le fluide et tracer son allure dans la couche de fluide. On notera V la vitesse du skieur supposée permanente dans cette question.

2. En supposant l'expression de la vitesse du fluide $v(z)$ toujours valable ici, étudier le mouvement du skieur et déterminer sa vitesse *V(t)* en fonction du temps. À t = 0 on donne : $\frac{dx}{dt}(0) = V_0$. Exprimer le temps caractéristique τ de la décroissance de la vitesse *V(t)* du skieur en fonction de e, S, η et m.
   Calculer τ avec $e = 8\mu m$, $\eta = 1{,}8.10^{-3}\ Pa.s$, $m = 60\ kg$ et $S = 0{,}05\ m^2$ (on note que la surface effective de contact entre les skis et la neige est très inférieure à la surface des semelles des skis).
   Pour valider l'hypothèse de régime permanent pour la vitesse dans la tranche de fluide, évaluer le temps τ' caractéristique de l'évolution du fluide en utilisant la masse d'eau m' en mouvement sous le ski. Masse volumique de l'eau : ρ = 1,0.10^3 kg.m^{-3} . Conclusion.
3. L'épaisseur de la couche de fluide est en réalité liée à la puissance des forces de viscosité. Nous supposerons pour simplifier que la quantité de chaleur ainsi dégagée lors d'un déplacement dx du ski est intégralement utilisée pour provoquer la fusion de la neige sur la largeur L, l'épaisseur e et la longueur dx. En déduire l'épaisseur e en fonction de la chaleur latente massique de fusion de la neige L_{fus}, la vitesse du skieur V, la surface S, η, ρ et L.

Mécanique des fluides
Le cas du patineur (+ corrigé)

1.



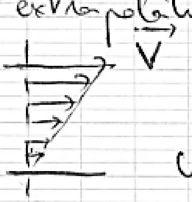
sol

$$\vec{F_1} = -\eta \cdot S \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} \cdot \vec{e_x}$$

$$\vec{F_2} = \eta \cdot S \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=e} \vec{e_x}$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=e}$$

Par extrapolation $\frac{dv}{dz} = cte$.



$$v(z) = az + b$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$v(e) = V \Rightarrow a = \frac{V}{e}$$

$$\boxed{v(z) = \frac{V}{e} z}$$

2. Syst. skieur

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-F_2 = m \cdot \frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\eta S \frac{dv}{dz} = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\eta S \frac{v}{e} = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \underbrace{\left(\frac{\eta S}{me}\right)}_{\frac{1}{\tau}} v = 0 \qquad \tau = \frac{me}{\eta S}$$

$$v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = 5{,}3\,s$

$\tau' = \dfrac{m'e}{\eta S} = 4.10^{-4}\,s \ll \tau$

3. Travail élémentaire de la force de viscosité :

$\delta W = \vec{F}.dx.\vec{e_x}$

$= -\eta \dfrac{V}{e} S dx$

Quantité de chaleur élémentaire :

$\delta Q = L_{fus} \times dm$

$= L_{fus} \times \rho \times dV$

$= L_{fus} \times \rho \times e \times dx \times L$

$\eta \dfrac{V}{e} S \cancel{dx} = L_{fus}\, \rho\, e\, \cancel{dx}\, L$

$e^2 = \dfrac{\eta V S}{L_{fus}\, \rho L}$

$e = \sqrt{\dfrac{\eta V S}{L_{fus}\, \rho L}}$