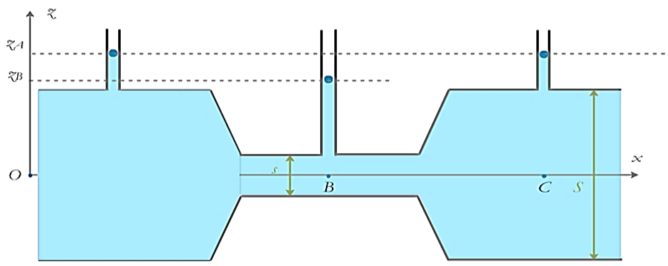
MF2 MECANIQUE DES FLUIDES / TD 2

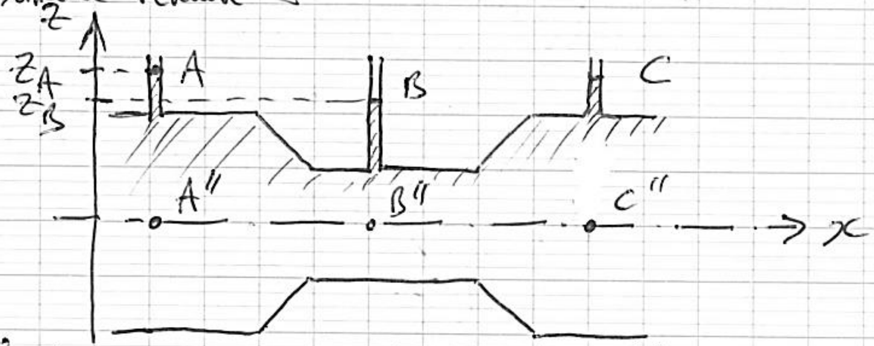
Exercice 1 : Débitmètre Venturi

On considère un débitmètre cylindrique horizontal de plus grande section S et de plus petite section s. Lorsque le fluide s'écoule dans le dispositif, une différence de hauteur de fluide apparaît, pouvant être reliée à la vitesse d'écoulement donc au débit.
On étudie un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide de masse volumique ρ dans une conduite horizontale de section variable, telle que $S > s$.
On suppose l'écoulement parfait : le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme. Trois tubes piézométriques, également appelés prises de pression, sont placés sur trois sections de la conduite pour mesurer la pression au sein du fluide.



1) Relier la hauteur de fluide dans les tubes piézométriques à la pression P_i qui règne dans l'écoulement au niveau de la section i. D'après la figure, comment évolue la pression lors du resserrement de section ?
2) Interpréter ce résultat en utilisant le théorème de Bernoulli.
3) En déduire une méthode de mesure du débit.
4) Discuter la valeur de la hauteur de fluide dans le 3$^{\text{ème}}$ tube.

Débimètre Venturi :



Écoulement suivant x (unidirectionnel).

1) * Relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles entre les points A et A'' :

$$p(A'') = p(A) + \rho g z_A \quad (1) \quad \text{et} \quad p(A) = p_0$$

Idem pour B et B'' :

$$p(B'') = p(B) + \rho g z_B \quad (2) \quad \text{et} \quad p(B) = p_0$$

(1) − (2) :

$$p(A'') - p(B'') = \rho g (z_A - z_B) = \rho g \Delta h \quad (3)$$

2) * Bernoulli sur une ligne de courant passant par A'' et B'' :

$$p(A'') + \cancel{\rho g z_{A''}} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p(B'') + \cancel{\rho g z_{B''}} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad (4)$$

Avec : $z_{A''} = z_{B''}$

$$(4) \Rightarrow p(A'') - p(B'') = \frac{1}{2}\rho (v_A^2 - v_B^2)$$

$$(3) \Rightarrow \underline{\rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho (v_A^2 - v_B^2)} \quad (5)$$

3) * Écoulement incompressible

$\Rightarrow$ Conservation du débit volumique.

$\Leftrightarrow \underline{D_v = S v_A = s v_B}$

$$\Rightarrow v_A = \frac{D_v}{S} \qquad v_B = \frac{D_v}{s}$$

$$(5) \Rightarrow \cancel{\rho} g \Delta h = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D_v^2}{S^2} - \frac{D_v^2}{s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\rho} D_v^2 \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{s^2}\right)$$

$$\boxed{D_v = \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{\left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{s^2}\right)}}}$$

4) A cause des pertes de charge, on devrait avoir :

$$z_C < z_A.$$

Exercice 2 : Sonde de Pitot

Les **sondes de Pitot** sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle, utilisés par exemple en aéronautique ou pour l'étude d'écoulements industriels en conduite.

Elles sont notamment présentes sur le fuselage des avions, et rendues tristement célèbres suite à l'accident d'un avion de ligne en 2009 entre Rio et Paris.

Elles permettent de mesurer la vitesse relative v_∞ d'écoulement d'un fluide de masse volumique μ par rapport au tube de Pitot, en mesurant la différence de pression entre deux points A et B de l'écoulement joints par une ligne de courant.

On s'intéresse ici à un modèle de tube de Pitot représenté **figure 4** pouvant équiper certaines souffleries de petite taille, où un liquide est placé dans un tube gradué reliant les deux prises de pression *A* et *B*. Une fois le régime permanent atteint, le liquide est immobile.

Figure 3 – Sonde de Pitot sur un avion.

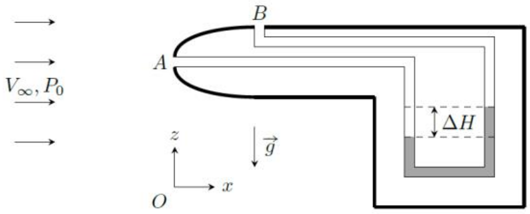


Figure 4 – Schéma de principe d'une sonde de Pitot.

L'écoulement d'air est supposé parfait et incompressible. On note ρ la masse volumique du liquide, ρ_0 celle de l'air, P_0 la pression atmosphérique et V_∞ la vitesse relative du vent aérodynamique, que l'on cherche à déterminer.

Bien que l'écoulement soit externe, on admet que le théorème de Bernoulli s'applique le long d'une ligne de courant de la même façon que pour un écoulement interne.

1) Quelle est la vitesse d'écoulement en *A* ? En supposant une symétrie parfaite des lignes de courant autour du nez du tube de Pitot, justifier qualitativement l'existence d'une ligne de courant amenant au point *A* appelé « point d'arrêt ».
2) Justifier qualitativement que $v_B \approx V_\infty$ et $P_B \approx P_0$.
3) En déduire une expression de P_A en fonction de P_B, μ_0 et V_∞.
4) Exprimer ΔH en fonction de μ, P_A et P_B.
5) En déduire l'expression de V_∞.
6) L'utilisation d'un tube de Pitot est limité aux écoulements lents. Pourquoi ? Sur quel critère un écoulement peut-il être dans ce contexte qualifié de lent ?

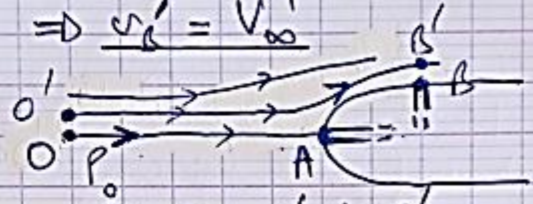
Sonde de Pitot.

1) $v_A = 0$ (Voir lignes de courant).

2) On suppose l'air incompressible et non visqueux (parfait).

$\Rightarrow \underline{v_B' = V_\infty}$

(O' très proche de O)



(B' très proche de B)

Ligne de courant entre O' et B' :

$$P_0' + \frac{1}{2}\rho_0 V_\infty^2 + \cancel{\rho_0 g z_0'} = P_B' + \frac{1}{2}\rho_0 v_B'^2 + \cancel{\rho_0 g z_B'}$$

avec : $\left| \begin{array}{l} v_B' = V_\infty . \\ z_B' \simeq z_0' \end{array} \right.$ (sonde de petite taille).

$\rightarrow \underline{P_B' \simeq P_0}$ et $\underline{P_B' \simeq P_B}$ car B et B' très proches.

3) Ligne de courant entre O et A :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_0 V_\infty^2 + \cancel{\rho_0 g z_0} = P_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho_0 v_A^2} + \cancel{\rho_0 g z_A}$$

avec : $\left| \begin{array}{l} v_A \simeq 0 \\ z_0 = z_A . \end{array} \right.$

$\mu = \rho$
$\mu_0 = \rho_0$
(énoncé sujet)

On obtient :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_0 V_\infty^2 = P_A$$

D'où :

$$\underline{P_B + \frac{1}{2}\rho_0 V_\infty^2 = P_A .}$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho_0}}$$

4) Or : $\underline{P_A - P_B = \rho g \Delta h}$ (Statique des fluides).

D'où :

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{\rho_0}}$$

6) $<$ vitesse du son .

Exercice 3 : Ecritures du théorème de Bernoulli (E. Thibierge)

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont justes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture juste, préciser sa dimension (pression, énergie massique, puissance, etc.). On note les pertes de charge $\Delta p > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1 - $\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e$

2 - $p_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + gz_s = p_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + gz_e$

3 - $\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = -\Delta p$

4 - $D_m\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - D_m\left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = \mathcal{P}_i$

5 - $\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = -g\,\Delta h$

6 - $\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + z_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + z_e\right) = w_i$

7 - $D_m\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - D_m\left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = w_i$

8 - $\left(\frac{p_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e\right) = -\Delta h$

9 - $D_m\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - D_m\left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = D_m g\,\Delta h$

10 - $D_V\left(p_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - D_V\left(p_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \mathcal{P}_i - D_V\,\Delta p$

11 - $\left(p_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - \left(p_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i$

$\boxed{1}$ Vrai, homogène à une énergie massique.

$\boxed{2}$ Faux : gz est une énergie massique mais $\frac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique.

$\boxed{3}$ Faux : p/ρ et Δp dans la même équation.

$\boxed{4}$ Vrai, homogène à une puissance.

$\boxed{5}$ Vrai, homogène à une énergie massique.

$\boxed{6}$ Faux, z est une hauteur mais évidemment pas v^2.

$\boxed{7}$ Faux, membre de gauche homogène à une puissance et membre de droite à une énergie massique.

$\boxed{8}$ Vrai, homogène à une hauteur.

$\boxed{9}$ Faux : l'équation est homogène, mais la perte de charge traduit une dissipation et il manque donc le signe $-$.

$\boxed{10}$ Vrai, homogène à une puissance.

$\boxed{11}$ Vrai, homogène à une pression (ou une énergie volumique).

Exercice 4 : Ecoulement forcé (E. Thibierge)

Au sein d'une installation industrielle, on doit pomper de l'eau dans une citerne posée sur le sol, pour l'éjecter dans l'atmosphère, à une hauteur $H = 5\,\mathrm{m}$ au dessus du sol, avec un débit minimal $Q = 5\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$ dans une conduite de diamètre $D = 5\,\mathrm{cm}$. On note $\Delta h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ la perte de charge totale exprimée en hauteur équivalente.

1 - Déterminer la vitesse débitante U en sortie de la conduite.

2 - Une première installation met l'eau sous pression grâce à de l'air comprimé. Déterminer la pression P_1 minimale que doit pouvoir imposer le dispositif pour vider la citerne entièrement.

3 - Une seconde installation remplace l'air comprimé par une pompe : le dessus de la citerne est donc laissé à l'air libre. Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ minimale de la pompe.

$\boxed{1}$ L'eau étant un liquide incompressible, il y a conservation du débit volumique dans toute l'installation. La citerne étant de diamètre très supérieur à la conduite, on peut négliger la vitesse débitante de l'eau dans la citerne devant celle dans la conduite,

$$\boxed{U = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

$\boxed{2}$ D'après le théorème de Bernoulli,

$$\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - \left(\frac{P_1}{\rho} + 0 + gh\right) = -g\,\Delta h$$

ce qui donne

$$P_1 = P_{\text{atm}} + \rho\frac{U^2}{2} + \rho g(H + \Delta h - h)$$

Cette pression P_1 est maximale lorsque la hauteur d'eau h dans la citerne est nul. Le système d'air comprimé doit donc être en mesure d'imposer une pression

$$\boxed{P_1 > P_{\text{atm}} + \rho\frac{U^2}{2} + \rho g(H + \Delta h) = 1{,}6\,\text{bar}\,.}$$

$\boxed{3}$ En réécrivant la théorème de Bernoulli en termes de puissance et en prenant en compte la présence de la pompe,

$$D_{\text{m}}\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - D_{\text{m}}\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gh\right) = -D_{\text{m}}g\,\Delta h + \mathcal{P}$$

soit avec le débit volumique $Q = D_{\text{m}}/\rho$

$$\rho Q\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - \rho Q\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gh\right) = -\rho Q\, g\,\Delta h + \mathcal{P}$$

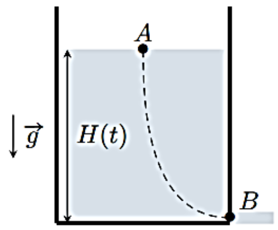
d'où on déduit

$$\mathcal{P} = \rho Q\left[\frac{U^2}{2} + g(H + \Delta h - h)\right]\,.$$

Encore une fois, le cas le plus défavorable est celui où $h = 0$. Il faut donc que la pompe puisse fournir une puissance

$$\boxed{\mathcal{P} > \rho Q\left[\frac{U^2}{2} + g(H + \Delta h)\right] = 285\,\text{W}\,.}$$

<u>Exercice 5 : Vidange d'un réservoir</u> (E. Thibierge)



Soit un réservoir cylindrique de section S, initialement rempli d'eau avec une hauteur H_0. On perce au point B, au fond de ce réservoir, un orifice de section $s \ll S$, par lequel il se vide. On suppose étudier la vidange dans une approximation de régime quasi-stationnaire.

1 - Montrer que $v_B \gg v_A$.

2 - En appliquant la relation de Bernoulli, montrer que le débit volumique sortant du cylindre s'exprime par $D_V = s\sqrt{2gH(t)}$.

3 - Établir l'équation différentielle en $H(t)$ qui régit la vidange du réservoir.

4 - En déduire le temps T nécessaire pour vider intégralement le réservoir.

5 - En fonction de la façon dont l'orifice est percé, on peut observer des écarts significatifs aux relations établies précédemment. Quelle peut en être l'origine ?

$\boxed{1}$ L'eau étant un fluide incompressible, on a par conservation du débit volumique

$$D_V = S\,v_A = s\,v_B \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_B = \frac{S}{s} v_A \gg v_A\,.}$$

$\boxed{2}$ Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice (on pourrait tout aussi bien dire « sur la ligne de courant allant de A à B »), évidemment sans puissance indiquée et en négligeant les pertes de charge,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0$$

car la pression dans un jet libre est égale à la pression atmosphérique. On en déduit

$$v_B^2 = 2gH$$

et ainsi le débit volumique

$$\boxed{D_V = s\sqrt{2gH}\,.}$$

$\boxed{3}$ Le volume d'eau $\mathrm{d}V$ sortant du réservoir pendant $\mathrm{d}t$ vaut

$$\mathrm{d}V = D_V\,\mathrm{d}t = S\,[H(t) - H(t+\mathrm{d}t)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{s\sqrt{2gH} = -S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,.}$$

$\boxed{4}$ Une telle équation s'intègre par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{H_0}^{0} \frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^T \mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$0 - 2\sqrt{H_0} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}(T-0)$$

et ainsi

$$\boxed{T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

$\boxed{5}$ Le modèle utilisé ne tient pas compte des pertes de charge, qui peuvent être importantes, et tout particulièrement la **perte de charge singulière au niveau de l'orifice**.

Exercice 6 : Alimentation d'une maison depuis un château d'eau (PT 2015)

On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 20\,\mathrm{m}$ et de section maximale $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique par une ouverture de même section s.

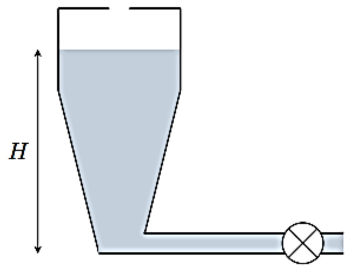


Figure 3 – **Schéma général.**

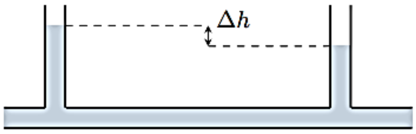


Figure 4 – **Mesure de perte de charge.**

1 - Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement le vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3 - Calculer numériquement le débit volumique.

4 - La canalisation horizontale est le lieu d'une perte de charge régulière. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer le théorème de Bernoulli en introduisant un coefficient K caractéristique de cette perte de charge.

5 - Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de $10\,\mathrm{m}$. On mesure une différence de hauteur d'eau $\Delta h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, voir figure 4. En déduire la perte de charge linéaire due au tuyau d'alimentation.

6 - Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à $1{,}0\,\mathrm{km}$ du chateau d'eau ?

7 - On souhaite retrouver la vitesse déterminée au début de l'exercice. On installe pour cela une pompe. Déterminer la puissance qu'elle doit fournir.

$\boxed{1}$ Notons v_0 la vitesse au niveau de la surface libre et v celle dans la canalisation. L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, d'où on déduit

$$D_V \underbrace{=}_{\text{surf libre}} S_0 v_0 \underbrace{=}_{\text{canalisation}} sv \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{v_0}{v} = \frac{s}{S_0} \ll 1\,.}$$

$\boxed{2}$ Supposons de plus l'écoulement stationnaire et parfait. D'après le théorème de Bernoulli,

$$\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gH\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gH} = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,,}$$

en considérant que la pression dans le jet libre est égale à la pression atmosphérique P_{atm}.

$\boxed{3}$ En interprétant la vitesse précédente comme la vitesse débitante,

$$\boxed{D_V = v\,s = 20\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 20\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

$\boxed{4}$ Une perte de charge régulière décrit une dissipation d'énergie mécanique du fluide par viscosité répartie tout au long d'un écoulement. Choisissons d'écrire cette constante K comme étant homogène à une hauteur. Le théorème de Bernoulli écrit entre le haut du chateau d'eau et la sortie de la canalisation devient

$$\left(\frac{P_{\text{atm}}}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 + H\right) = -K\,.$$

$\boxed{5}$ Le fluide ne s'écoule pas dans les deux tubes piézométriques verticaux, on y applique donc la loi de la statique des fluides pour en déduire la pression dans la canalisation : $P = P_{\text{atm}} + \rho g h$. La conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement v est la même sous les deux prises de pression. On en déduit en appliquant la relation de Bernoulli entre le bas des deux tubes notés 1 et 2

$$\left(\frac{P_{\text{atm}} + \rho g h_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}} + \rho g h_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) = -K$$

d'où

$$K = h_1 - h_2 = \Delta h\,.$$

La perte de charge linéaire k s'en déduit par $k = K/\ell$ avec $\ell = 10\,\text{m}$ la distance séparant les deux tubes,

$$\boxed{k = \frac{\Delta h}{\ell} = 2\cdot 10^{-3}\,.}$$

> *La perte de charge par unité de longueur k est sans dimension en tant que rapport de deux longueurs.*

$\boxed{6}$ La perte de charge sur toute la longueur de canalisation vaut kL avec $L = 1{,}0\,\text{km}$. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre la surface libre du château d'eau et le robinet,

$$\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 + H\right) = -kL \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2g\,(H - kL)} = 18{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

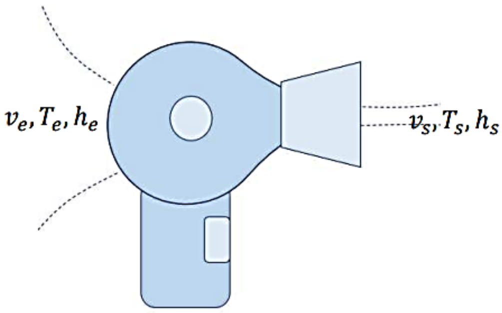
$\boxed{7}$ La perte de charge kL est l'énergie massique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance

$$\mathcal{P} = D_{\text{m}} g k L \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P} = \rho D_V\, g\, kL = 400\,\text{W}\,.}$$

> *Ayant identifié l'énergie massique, vous devez savoir qu'il faut multiplier par D_m pour obtenir une puissance, puis savoir (ou retrouver par analyse dimensionnelle) que $D_m = \rho D_V$ pour conclure. Attention à ne pas oublier la multiplication par g !*

Exercice 7 : Détermination du rendement d'un sèche-cheveux (ATS 2020)

On considère l'écoulement de l'air à travers un sèche-cheveux. L'écoulement est supposé stationnaire, parfait et on va négliger les fluctuations de la masse volumique ρ de l'air qui sera alors considérée comme uniforme $\rho \approx 1\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. On note D_m le débit massique de l'air circulant à travers le sèche-cheveux. Au cours de cet écoulement, l'air reçoit une puissance thermique P_{th} (par l'intermédiaire d'une résistance chauffante intégrée au sèche-cheveux) et une puissance indiquée P_i (par l'intermédiaire d'une hélice intégrée dans le sèche-cheveux). On note :



- v_e la vitesse de l'air rentrant et v_s la vitesse de l'air sortant du sèche-cheveux (ces vitesses étant mesurées par rapport au sèche-cheveux immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen).
- T_e la température de l'air rentrant et T_s la température de l'air sortant du sèche-cheveux.
- h_e l'enthalpie massique de l'air rentrant et h_s l'enthalpie massique de l'air sortant du sèche-cheveux.

Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie potentielle de pesanteur et on admettra que $v_e \ll v_s$. L'air sera également assimilé à un gaz parfait dont la capacité thermique massique à pression constante c_p vaut $c_p = 1000\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$.

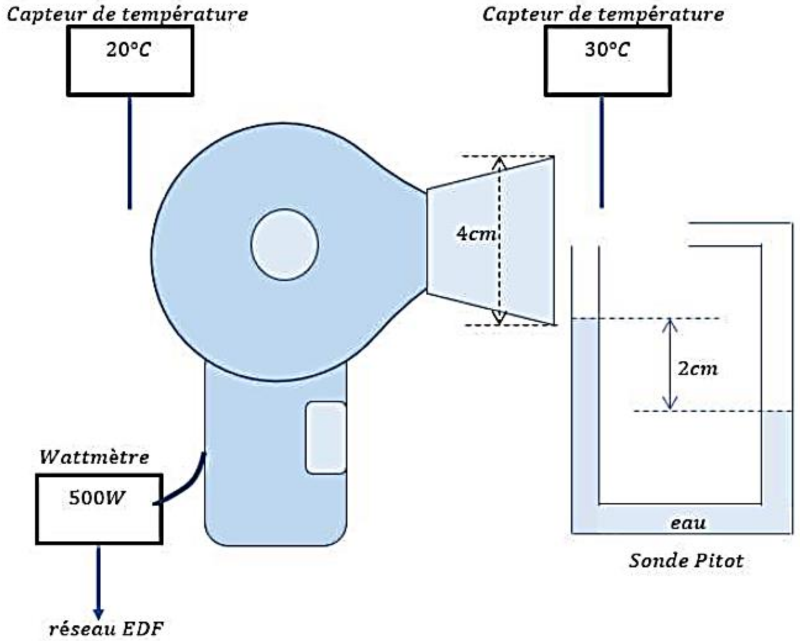
33) Exprimer la différence $h_s - h_e$ en fonction de c_p, T_s et T_e.

34) Enoncer le 1[er] principe en système ouvert puis, à l'aide des hypothèses, démontrer que :

$$D_m\left(c_p(T_s - T_e) + \frac{v_s^2}{2}\right) = P_{th} + P_i$$

La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat (en proposant des modèles, des hypothèses de travail, des approximations, des valeurs numériques…). Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

35) En utilisant les relevés des différents appareils de mesure utilisés pour cette expérience, déterminer le rendement η de ce sèche-cheveux.



33) La modélisation du gaz (2ème loi de Joule pour les gaz parfaits) donne $h_s - h_e = c_p\left(T_S - T_e\right)$

Notations massiques caractéristiques des systèmes ouverts

34) Premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire (premier principe industriel)

$D_m.\Delta\left(h + e_c + e_p\right) = P_i + P_{th}$ *Cours*

Ici, variations négligeables d'énergie potentielle de pesanteur $\Delta e_p \approx 0$

$\Delta e_c = \frac{1}{2}v_s^2 - \cancel{\frac{1}{2}v_e^2}$ car $v_e << v_s$

donc $\boxed{D_m\left(c_p\left(T_S - T_e\right) + \frac{1}{2}v_s^2\right) = P_i + P_{th}}$

Sèche cheveux.

Le sèche cheveux a 2 fonctions :
- Mettre en vitesse l'air.
- Chauffer l'air.

La sonde Pitot mesure la vitesse de l'air :

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_e g \Delta h}{\rho_a}}$$

(voir ex. 2)

| ρ_e : masse vol. de l'eau.
| ρ_a : masse vol. de l'air.

A.N. : $V = \sqrt{\frac{2.1000.10.20.10^{-2}}{1}}$

$= \sqrt{4.10^2} = \underline{20 \text{ m.s}^{-1}}$

D'où le débit d'air :

$D_m = \rho_{air}.V.S$
$= \rho_{air}.\pi R^2.V$

($D = 4$ cm $\Rightarrow R = 2$ cm)

A.N. :

$D_m = 1 \times \pi \times (2.10^{-2})^2.20$
$\simeq 1 \times 3 \times 4.10^{-4}.20$
$\simeq 240.10^{-4} \simeq \underline{2{,}4.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}}$

Puissance nécessaire pour déplacer cet air et chauffer cet air :

$$P = D_m\left(c_p(T_s - T_e) + \frac{v_s^2}{2}\right)$$

$$= 2{,}4.10^{-2}\left(1000 \times (30-20) + \frac{20^2}{2}\right)$$

$$= 2{,}4.10^{-2}(\underbrace{10^4}_{\text{Thermique}} + \underbrace{2.10^2}_{\text{Mouvement de l'air (négligeable)}})$$

$\simeq 2{,}4.10^2 \simeq \underline{240 \text{ W}}$

$\eta = \frac{240}{500} \simeq 0{,}5 \simeq \underline{50\%}$

Exercice 8 : Equipement d'un forage d'eau potable (Extrait BTS ET)

La valeur moyenne du débit Q de la pompe, fixée par les besoins en eau de l'usine, est de **7 $m^3.h^{-1}$**. Pour s'adapter aux variations de niveau du puits L4, il peut varier entre **Q_{min} = 4 $m^3.h^{-1}$** et **Q_{max} = 10 $m^3.h^{-1}$**.

On cherche à déterminer les caractéristiques de la pompe.

*La **figure 2** présente le profil de la conduite hydraulique reliant la pompe immergée du puits L4 à la cuve 1R de la cuverie, destinée à recevoir l'eau de ce puits.*

*Il s'agit d'une conduite en PVC de diamètre intérieur **D = 50 mm** et de longueur totale **L = 920 m**.*

Les pertes de charge linéiques le long de cette conduite dépendent du débit volumique Q et sont données par :

$J = 0{,}076.Q^2 + 0{,}26.Q$ *où J sont les pertes de charge <u>POUR 100 m DE CONDUITE</u> (elles sont exprimées en **m** de colonne d'eau). Q est le débit (exprimé en **$m^3.h^{-1}$**).*

Vu la grande longueur et la forme de la conduite, on négligera les pertes de charge singulières devant les pertes de charge régulières.

Une prise d'air en haut du forage permet de maintenir la pression de la surface de l'eau dans le puits à la pression atmosphérique.

Côté refoulement dans la cuve 1R, l'eau débouche également à la pression atmosphérique.

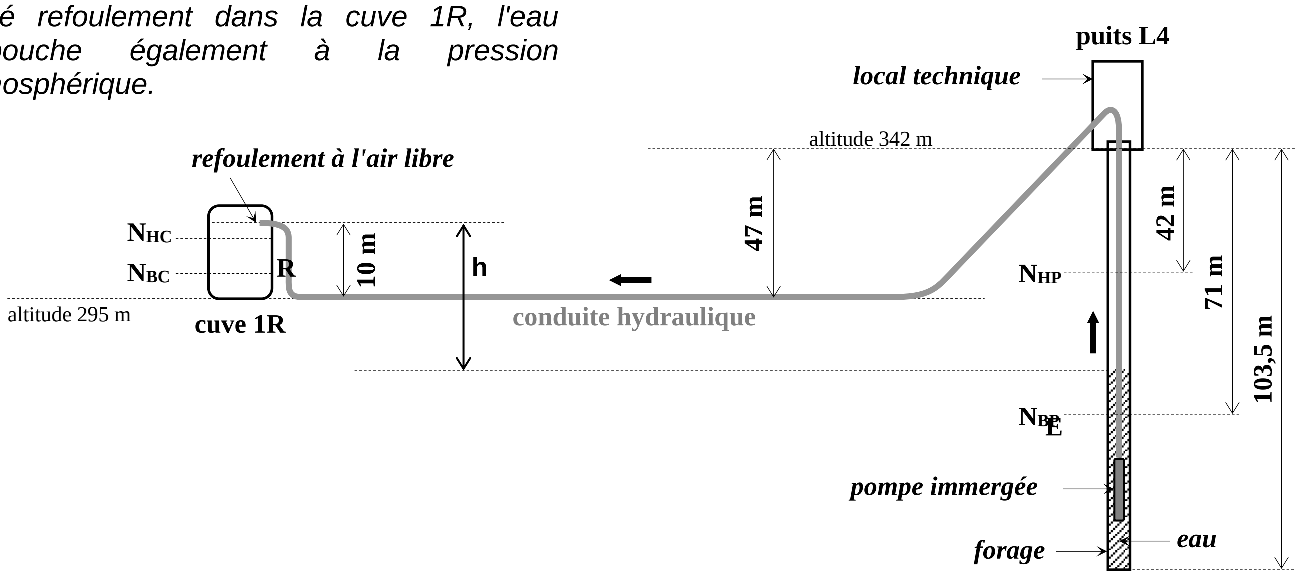


figure 2 : profil de l'installation hydraulique

*Au cours d'une l'année, le niveau d'eau dans le puits peut varier entre une valeur minimale **N_{BP}** et maximale **N_{HP}**.*

Données : *masse volumique de l'eau : ρ **= 1000 $kg.m^{-3}$***

*accélération du champ de pesanteur : **g = 9,81 $m.s^{-2}$***

<u>Caractéristiques hydrauliques de l'installation en vue du choix de la pompe et du moteur</u>

On rappelle l'expression de la puissance hydraulique P d'une pompe :

$$P = Q.\,\rho.g.H_{pompe}$$

où Q est le débit de fluide traversant la pompe (exprimé en $m^3.s^{-1}$) et H_{pompe} sa hauteur manométrique totale.

Ainsi que l'expression du théorème de Bernoulli généralisé :

$$p_B + \rho.g.z_B + \tfrac{1}{2}.\rho.v_B^2 = p_A + \rho.g.z_A + \tfrac{1}{2}.\rho.v_A^2 + \rho.g.H_{pompe} - \rho.g.\Delta H$$

où
- *p_B, z_B et v_B sont respectivement la pression, l'altitude et la vitesse du fluide en un point B situé en aval de l'écoulement*
- *p_A, z_A et v_A sont respectivement la pression, l'altitude et la vitesse du fluide en un point A situé en amont de l'écoulement*
- *H_{pompe} et ΔH la hauteur manométrique de la pompe et les pertes de charges exprimées en m de colonne de fluide*

A.1.1. Déterminer les valeurs h_{min} et h_{max} du dénivelé h entre le point de refoulement dans la cuve 1R et la surface de l'eau dans le puits (voir *figure 2*) :
- h_{min} : valeur de h lorsque l'eau dans le puits est au niveau haut N_{HP}
- h_{max} : valeur de h lorsque l'eau dans le puits est au niveau bas N_{BP}.

Indiquer les valeurs trouvées dans la colonne de gauche du tableau du *document-réponse A.1*.

A.1.2. En appliquant le théorème de Bernoulli généralisé, entre les points E et R, établir une relation entre :
- H_{pompe} : hauteur manométrique totale de la pompe (nécessaire à faire circuler l'eau dans l'installation) exprimée en m de colonne d'eau
- h : le dénivelé défini à la question précédente
- ΔH : les pertes de charges totales dans la conduite exprimées également en m de colonne d'eau.

On admettra que les termes correspondant à l'énergie cinétique volumique sont négligeables devant les autres termes de la relation.

A.1.3. En déduire que H_{pompe} peut s'exprimer en fonction du débit Q dans la conduite par la relation : $\mathbf{H_{pompe} = 0{,}7.Q^2 + 2{,}4.Q + h}$ avec H_{pompe} en **m** et Q en $\mathbf{m^3.h^{-1}}$.

A.1.4. Compte tenu des caractéristiques de l'installation et des variations possibles du débit, calculer la valeur maximale de H_{pompe}.

A.1.5. Calculer la puissance hydraulique P_{hydrau} que doit fournir la pompe pour assurer un débit $Q = 10\ m^3.h^{-1}$ avec un dénivelé $h = h_{max}$.

A.1.6. En s'aidant des questions précédentes, compléter le tableau du *document-réponse A.1* en indiquant pour chaque cas :
- la hauteur manométrique totale nécessaire apportée par la pompe H_{pompe}
- la puissance hydraulique fournie par la pompe P_{hydrau}.

document-réponse A.1

	$Q = Q_{min} = 4\ m^3/h$	$Q = Q_{max} = 10\ m^3/h$
$h = h_{min} =$	$H_{pompe} =$ $P_{hydrau} =$	$H_{pompe} =$ $P_{hydrau} =$
$h = h_{max} =$	$H_{pompe} =$ $P_{hydrau} =$	$H_{pompe} =$ $P_{hydrau} =$

1 pt A.1.1. $h_{min} = 42 - 47 + 10 = 5$ m
$h_{max} = 71 - 47 + 10 = 34$ m

2 pt A.1.2. E : point à la surface de l'eau dans le puits
R : point au refoulement dans la cuve 1R
$P_0 + \rho.g.z_R + ½.\rho.v_R^2 = P_0 + \rho.g.z_E + ½.\rho.v_E^2 + \rho.g.H_{pompe} - \rho.g.\Delta H$
avec $½.\rho.v_R^2$ et $½.\rho.v_E^2$ négligeables et $z_R - z_E = h$
d'où $H_{pompe} = \Delta H + h$

1 pt A.1.3. $\Delta H = J.L/100 = (0{,}076.Q^2 + 0{,}26.Q)\times 920 / 100 = 0{,}7.\ Q^2 + 2{,}4.Q$ avec Q en m³/h
d'où $H_{pompe} = 0{,}7.\ Q^2 + 2{,}4.Q + h$

1 pt A.1.4. $H_{pompe\ max}$ est obtenu pour $Q = Q_{max} = 10\ m^3/h$ et $h = h_{max} = 34$ m :
$H_{pompe\ max} = 0{,}7.Q_{max}^2 + 2{,}4.Q_{max} + h_{max} = 0{,}7\times 10^2 + 2{,}4\times 10 + 34 = 128$ m

1 pt A.1.5. $P_{hydrau} = Q.\ \rho.g.\ H_{pompe\ max} = (10/3600)\times 1000\times 9.81\times 128 = 3{,}49$ kW

2 pt A.1.6. *document-réponse A.1 :*

	$Q = Q_{min} = 4\ m^3/h$	$Q = Q_{max} = 10\ m^3/h$
$h = h_{min} = 5$ m	$H_{pompe} = 25{,}8$ m $P_{hydrau} = 281$ W	$H_{pompe} = 99$ m $P_{hydrau} = 2{,}70$ kW
$h = h_{max} = 34$ m	$H_{pompe} = 54{,}8$ m $P_{hydrau} = 597$ W	$H_{pompe} = 128$ m $P_{hydrau} = 3{,}49$ kW