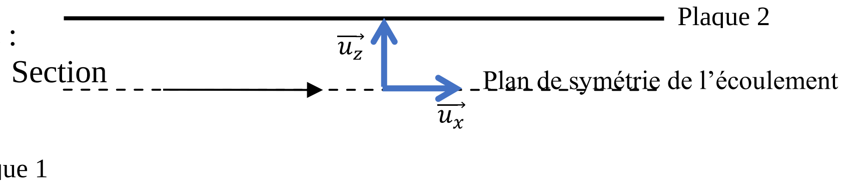
Problème 1

Entre 2 plaques horizontales, distantes d'une épaisseur 2e, s'écoule de manière stationnaire un fluide incompressible de viscosité η, ce qui conduit à un champ de vitesses non uniforme :

Vue en coupe de l'écoulement :



Entre les 2 plaques, la vitesse $\vec{v}$ du fluide dépend de la distance z au plan de symétrie de l'écoulement : $\vec{v} = v_o.\left(1 - \left(\frac{z}{e}\right)^2\right).\vec{u_x}$

1) Représenter quelques lignes de courant.
2) Déterminer l'expression de la divergence $div(\vec{V})$ du vecteur vitesse. Interpréter le résultat.
3) Déterminer l'expression du rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$ du vecteur vitesse. Interpréter le résultat.
4) Donner l'expression de la force de cisaillement entre 2 couches de fluide.

1) lignes de courant horizontales.

2) $\mathrm{div}\,\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Expression Résultat.

Avec $\begin{cases} v_x = v_0\left(1-\left(\dfrac{z}{e}\right)^2\right) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{e}\right)^2\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

fluide incompressible

3) $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_0\left(1-\left(\dfrac{z}{e}\right)^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Expression Résultat.

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(v_0\left(1-\left(\dfrac{z}{e}\right)^2\right)\right) - 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(0) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(v_0\left(1-\left(\dfrac{z}{e}\right)^2\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0\dfrac{2z}{e^2} \\ 0 \end{pmatrix} = -v_0\frac{2z}{e}\,\vec{u_y}$$

Rotationnel suivant l'axe y (perpendiculaire au plan de la feuille).

4) $$d\vec{F}(z) = \eta . dS . \frac{\partial v}{\partial z}\,\vec{u_x}$$

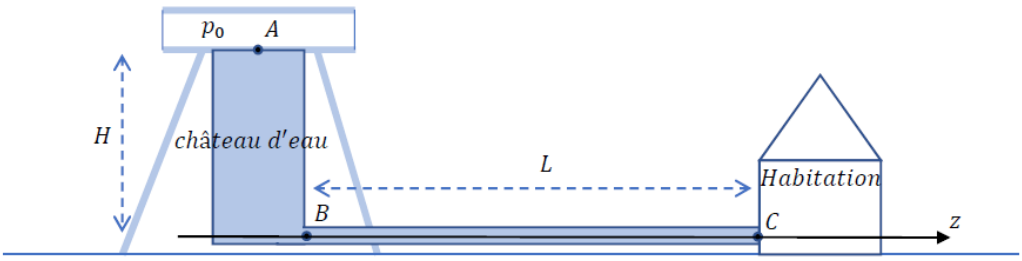
$$= \eta . dS . \left(-2v_0\frac{z}{e^2}\right).\vec{u_x}$$

Problème 2 (Extrait concours ATS 2019)

II- Résistance hydraulique

a) Loi de Poiseuille

On considère une installation simplifiée constituée d'un château d'eau alimentant une habitation. L'eau dans le réservoir atteint une hauteur $H = 30\,\mathrm{m}$ supposée constante. L'eau circule dans une canalisation cylindrique de rayon $a = 20\,\mathrm{mm}$ et de longueur L avant d'atteindre le robinet de la maison.



La pression atmosphérique p_0 est supposée uniforme, la masse volumique de l'eau supposée incompressible est notée ρ et l'intensité du champ de pesanteur terrestre est notée g. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On ouvre le robinet en C et on remplit une baignoire de 180 L en 30 minutes.

16) Evaluer numériquement le débit volumique D_v en C en $\mathrm{m^3.s^{-1}}$.

17) En déduire la vitesse moyenne v_B de l'écoulement en B et la calculer. On prendra $\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$.

18) Exprimer la pression p_B en B en fonction de v_B et des données du sujet en précisant les hypothèses utilisées pour appliquer la relation de Bernoulli. On supposera que la vitesse de l'écoulement en A est telle que $v_A \ll v_B$.

19) Comparer numériquement v_B^2 et $2gH$. En déduire une expression simple de p_B. Commenter ce résultat.

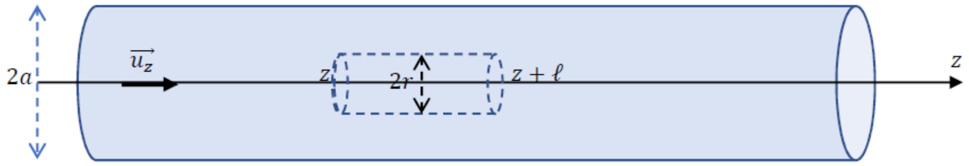
On souhaite caractériser l'écoulement stationnaire entre les points B et C en tenant compte de la viscosité dans la canalisation. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses de la forme :

$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$.

Avec la géométrie proposée, on donne l'opérateur divergence $\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ et l'opérateur gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

20) Montrer, en utilisant les hypothèses de travail, que v_z ne dépend pas de z. On utilisera l'équation de conservation de la masse pour justifier ce résultat.

Le résultat précédent implique que le mouvement de toute particule de fluide est rectiligne et uniforme. Nous allons étudier le déplacement d'un volume V cylindrique de fluide, de rayon $r < a$, d'axe z et de longueur $\ell < L$:



Dans la suite, on néglige l'effet du poids dans la canalisation horizontale d'axe z. Le mouvement de ce volume V est assuré par des forces pressantes. On supposera que le champ des pressions p dans la canalisation est fonction uniquement de z , on a donc $p(z)$.

21) Donner l'expression de la résultante $\overrightarrow{F_n}$ des forces de pression s'exerçant sur V.

Parallèlement, ce volume V subit des forces de viscosité par le fluide qui l'entoure et qui se déplace à une vitesse différente. On donne la loi phénoménologique de Newton définissant la force tangentielle subie par chaque élément dS de la paroi latérale de V :

$$d\overrightarrow{F_t} = \eta \frac{dv_z(r)}{dr} dS\overrightarrow{u_z}$$

où η est le coefficient de viscosité dynamique de l'eau.

22) Donner l'expression de la résultante des forces $\overrightarrow{F_t}$ de viscosité s'exerçant sur V en fonction de $\frac{dv_z(r)}{dr}$.

23) La prise en considération de la viscosité de l'eau implique la condition $v_z(r = a) = 0$. En déduire alors que $v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2 - r^2)$ où $\Delta p = \big(p(z) - p(z+\ell)\big)$.

24) Exprimer le débit volumique D_v dans la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge Δp : $D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}\Delta p$.

25) Montrer, à l'aide d'une analogie électrocinétique, que l'on peut définir une résistance hydraulique R_h entre les points B et C.

26) Expliquer alors l'intérêt des châteaux d'eau.

b) Résolution de problème

La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

27) Un Français consomme en moyenne 150 L d'eau par jour et le volume d'eau dans un château d'eau est typiquement $V_c = 2500\ \mathrm{m}^3$. Quelle serait alors la distance moyenne séparant deux châteaux d'eau en France en supposant que l'on n'utilise pas plus de la moitié des réservoirs chaque jour ? La distance « à vol d'oiseau » est de 1000 km entre Dunkerque et Perpignan et aussi entre Brest et Strasbourg.

II- Résistance hydraulique

a) Loi de Poiseuille

16) $D_V = \dfrac{180\text{ L}}{30\text{ min}} = \dfrac{6\text{ L}}{1\text{ min}} = \dfrac{6.10^{-3}\text{ m}^3}{60\text{ s}}$ donc $\boxed{D_v = 10^{-4}\text{ m}^3.\text{s}^{-1}}$

17) L'eau est considérée comme incompressible donc $D_v(B) = D_v(C)$

$D_v = \iint \vec{v}\cdot d\vec{S} = v_B.\pi.a^2$ donc $\boxed{v_B = \dfrac{D_v}{\pi.a^2}}$

A.N. $v_B = \dfrac{10^{-4}}{\pi\times 4.10^{-4}}$ soit $\boxed{v_B = 0{,}08\text{ m.s}^{-1}}$

18) Pour l'écoulement d'un fluide parfait incompressible en régime stationnaire, le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant AB est $p_A + \frac{1}{2}\rho.v_A^2 + \rho.g.z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho.v_B^2 + \rho.g.z_B$ avec $v_A << v_B$ et $p_A = p_0$ donc $\boxed{p_B = p_0 - \frac{1}{2}\rho.v_B^2 + \rho.g.H}$

19) $2.g.H = 600 >> v_B^2 = 6{,}4.10^{-3}$ donc $\boxed{p_B \approx p_0 + \rho.g.H \approx 4\text{ bar}}$
On obtient la même relation qu'en statique des fluides.

20) Le bilan de matière en mécanique des fluides s'écrit $\text{div}(\rho\,\vec{v}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et dans le cas d'un fluide incompressible $(\rho = Cte)$ il se simplifie en $\text{div}(\vec{v}) = 0$. L'énoncé précise que $\vec{v} = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$ soit $v_\theta = 0$ et $v_z = 0$ donc $\text{div}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$. Il en découle que $\boxed{\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$, v_z est indépendant de la variable z.

21) Il y a trois surfaces à ce volume donc trois forces de pression à calculer.
La force de pression sur la surface cylindrique est nulle car $p(z)$ y est uniforme.
La force de pression en z est $\pi.r^2.p(z)\overrightarrow{u_z}$.
La force de pression en $z+l$ est $-\pi.r^2.p(z+l)\overrightarrow{u_z}$.
La force de pression $\dfrac{dv_z}{dr} < 0$ totale sur ce volume est $\boxed{\vec{\Pi} = \pi.r^2.(p(z) - p(z+l))\overrightarrow{u_z}}$,

Remarque : En réalité, la pression dépende de z et de l'altitude z'. Il y a une force de pression sur la surface cylindrique dirigée vers le haut et qui vaut $\rho.g.\pi.r^2.l\,\overrightarrow{u_{z'}}$.

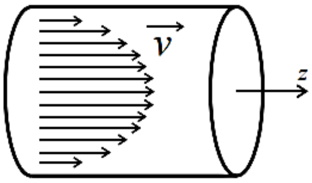
22) La force de viscosité est uniforme sur la surface cylindrique $2.\pi.r.l$ donc $\boxed{\overrightarrow{F_t} = \eta.\dfrac{dv_z}{dr}.2.\pi.r.l\,\overrightarrow{u_z}}$

Remarque sur le signe : $v_z(r)$ est une fonction décroissante (culture générale sur un fluide visqueux ou voir question 23) donc $\dfrac{dv_z}{dr} < 0$. Cela explique que $d\overrightarrow{F_t} = \eta.\dfrac{dv_z}{dr}dS\,\overrightarrow{u_z}$ est bien opposée à $\overrightarrow{u_z}$ comme on pouvait le penser. Ouf !

23) La réciproque de la première loi de Newton (principe de l'inertie) appliquée au volume V dans le référentiel terrestre galiléen nous dit que ce volume est pseudo isolé : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

En projetant sur $\overrightarrow{u_z}$, $\pi.r^2.(p(z)-p(z+l))+\eta.\frac{dv_z}{dr}.2.\pi.r.l = 0 \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = -r.\frac{p(z)-p(z+l)}{2.\eta.l}$.

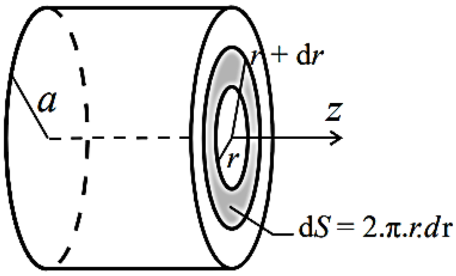
On intègre en remarquant que $\frac{p(z)-p(z+l)}{2.\eta.l}$ est indépendant de r :



$v_z(r) = -r^2.\frac{p(z)-p(z+l)}{4.\eta.l} + B$

or $v_z(a) = 0$ donc $\boxed{v_z(r) = (a^2-r^2).\frac{p(z)-p(z+l)}{4.\eta.l}}$

Remarque : le terme de pression $\rho.g.\pi.r^2.l\,\overrightarrow{u_z}$ qui a été omis dans cet énoncé était compensé par le poids du volume V. De toute façon, en projetant sur $\overrightarrow{u_z}$, ils n'apparaissaient pas.



24) $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = 2.\pi.r.dr\,\overrightarrow{u_z}$

$\Rightarrow D_v = \int_0^a (a^2-r^2).\frac{p(z)-p(z+l)}{4.\eta.l}.2.\pi.r.dr$

$\Rightarrow D_v = \pi\frac{p(z)-p(z+l)}{2.\eta.l}\int_0^a (a^2.r - r^3)\,dr$

$\Rightarrow D_v = \pi\frac{p(z)-p(z+l)}{2.\eta.l}\left[\frac{a^2.r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a$

$\Rightarrow D_v = \pi\frac{p(z)-p(z+l)}{2.\eta.l}.\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) \Rightarrow \boxed{D_v = \pi.a^4\,\frac{p(z)-p(z+l)}{8.\eta.l}}$

25) Analogie mécanique des fluides et électricité

Électrocinétique	Mécanique des fluides
I débit de charge	D_v débit volumique
U chute de potentiel	Δp chute de pression
$U = R.I$ loi d'Ohm	$\Delta p = R_h.D_v$

Par analogie, on a donc $\boxed{R_h = \frac{8\eta.l}{\pi.a^4}}$.

Attention, l'analogie s'arrête là ! En effet, en électricité, la résistance d'un fil cylindrique est $R = \frac{\rho.l}{\pi.a^2}$ et il y a une différence flagrante entre a^2 et a^2. A longueur égale pour obtenir le même débit, on peut remplacer un câble par N fils de diamètre N fois plus petit placés en dérivation alors qu'une veine doit être remplacée par N^2 veinules de diamètre N fois plus petit placés en dérivation.

26) Le château d'eau est une réserve d'eau conséquente pour assurer au réseau de distribution une pression constante même lorsque la demande est forte ; il peut palier à un défaut provisoire d'approvisionnement et servir de réserve d'eau pour les pompiers. La pression élevée permet d'avoir un débit élevé.

b) Résolution de problème

Attention : cette partie n'a aucun rapport avec la mécanique des fluide qui précède.

27) La France a une surface au maximum de $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ km}^2$

60 millions de Français consomment $60.10^6 \times 150.10^{-3} \approx 10^7 \text{ m}^3$ par jour.

Un château d'eau délivre en moyenne environ 1000 m^3 par jour donc il doit y avoir environ 10 000 châteaux d'eau en France.

Chacun délivrera un territoire d'aire environ égale à $\frac{10^6 \text{ km}^2}{10000} = 100 \text{ km}^2$ soit $10 \text{ km} \times 10 \text{km}$

La distance moyenne entre deux châteaux d'eau est d'environ 10 km.