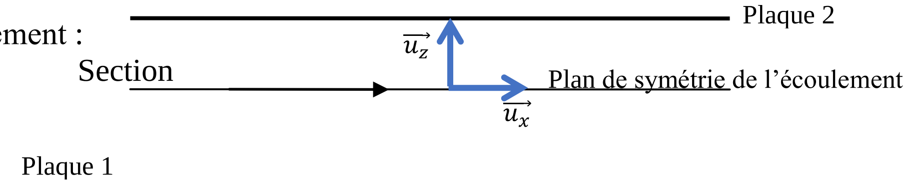
MF2 MECANIQUE DES FLUIDES / TD 3

Problème 1

Entre 2 plaques horizontales, distantes d'une épaisseur 2e, s'écoule de manière stationnaire un fluide incompressible de viscosité η, ce qui conduit à un champ de vitesses non uniforme :

Vue en coupe de l'écoulement :



Entre les 2 plaques, la vitesse $\vec{v}$ du fluide dépend de la distance z au plan de symétrie de l'écoulement : $\vec{v} = v_o.\left(1 - \left(\frac{z}{e}\right)^2\right).\overrightarrow{u_x}$

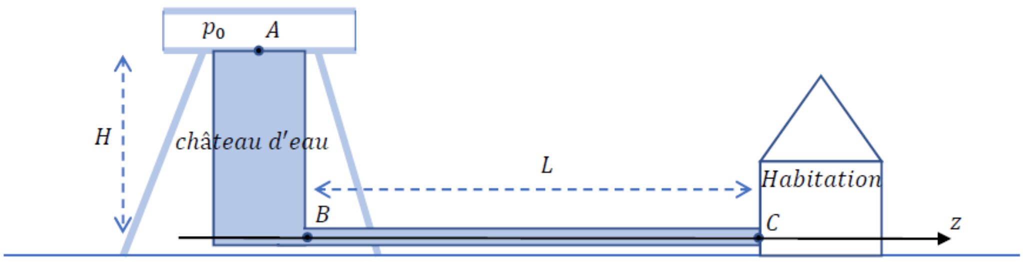
1) Représenter quelques lignes de courant.
2) Déterminer l'expression de la divergence $div(\vec{V})$ du vecteur vitesse. Interpréter le résultat.
3) Déterminer l'expression du rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$ du vecteur vitesse. Interpréter le résultat.
4) Donner l'expression de la force de cisaillement entre 2 couches de fluide.

Problème 2 (Extrait concours ATS 2019)

II- Résistance hydraulique

a) Loi de Poiseuille

On considère une installation simplifiée constituée d'un château d'eau alimentant une habitation. L'eau dans le réservoir atteint une hauteur $H = 30\,\mathrm{m}$ supposée constante. L'eau circule dans une canalisation cylindrique de rayon $a = 20\,\mathrm{mm}$ et de longueur L avant d'atteindre le robinet de la maison.



La pression atmosphérique p_0 est supposée uniforme, la masse volumique de l'eau supposée incompressible est notée ρ et l'intensité du champ de pesanteur terrestre est notée g. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On ouvre le robinet en C et on remplit une baignoire de 180 L en 30 minutes.

16) Evaluer numériquement le débit volumique D_v en C en $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$.
17) En déduire la vitesse moyenne v_B de l'écoulement en B et la calculer.
    On prendra $\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$.
18) Exprimer la pression p_B en B en fonction de v_B et des données du sujet en précisant les hypothèses utilisées pour appliquer la relation de Bernoulli. On supposera que la vitesse de l'écoulement en A est telle que $v_A \ll v_B$.
19) Comparer numériquement v_B^2 et $2gH$. En déduire une expression simple de p_B. Commenter ce résultat.

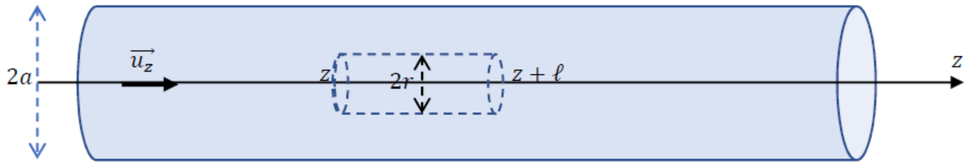
On souhaite caractériser l'écoulement stationnaire entre les points B et C en tenant compte de la viscosité dans la canalisation. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses de la forme :

$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$.

Avec la géométrie proposée, on donne l'opérateur divergence $\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ et l'opérateur gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

20) Montrer, en utilisant les hypothèses de travail, que v_z ne dépend pas de z. On utilisera l'équation de conservation de la masse pour justifier ce résultat.

Le résultat précédent implique que le mouvement de toute particule de fluide est rectiligne et uniforme. Nous allons étudier le déplacement d'un volume V cylindrique de fluide, de rayon $r < a$, d'axe z et de longueur $\ell < L$:



Dans la suite, on néglige l'effet du poids dans la canalisation horizontale d'axe z. Le mouvement de ce volume V est assuré par des forces pressantes. On supposera que le champ des pressions p dans la canalisation est fonction uniquement de z , on a donc $p(z)$.

21) Donner l'expression de la résultante $\overrightarrow{F_n}$ des forces de pression s'exerçant sur V.

Parallèlement, ce volume V subit des forces de viscosité par le fluide qui l'entoure et qui se déplace à une vitesse différente. On donne la loi phénoménologique de Newton définissant la force tangentielle subie par chaque élément dS de la paroi latérale de V :

$$d\overrightarrow{F_t} = \eta \frac{dv_z(r)}{dr} dS\overrightarrow{u_z}$$

où η est le coefficient de viscosité dynamique de l'eau.

22) Donner l'expression de la résultante des forces $\overrightarrow{F_t}$ de viscosité s'exerçant sur V en fonction de $\frac{dv_z(r)}{dr}$.

23) La prise en considération de la viscosité de l'eau implique la condition $v_z(r=a) = 0$. En déduire alors que $v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2 - r^2)$ où $\Delta p = \big(p(z) - p(z+\ell)\big)$.

24) Exprimer le débit volumique D_v dans la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge Δp : $D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}\Delta p$.

25) Montrer, à l'aide d'une analogie électrocinétique, que l'on peut définir une résistance hydraulique R_h entre les points B et C.

26) Expliquer alors l'intérêt des châteaux d'eau.

b) Résolution de problème

La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

27) Un Français consomme en moyenne 150 L d'eau par jour et le volume d'eau dans un château d'eau est typiquement $V_c = 2500\ \mathrm{m}^3$. Quelle serait alors la distance moyenne séparant deux châteaux d'eau en France en supposant que l'on n'utilise pas plus de la moitié des réservoirs chaque jour ? La distance « à vol d'oiseau » est de 1000 km entre Dunkerque et Perpignan et aussi entre Brest et Strasbourg.