

# CPGE ATS

## Programme de colles – Semaine 16 (3 au 8 février 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

MF1 : Statique des fluides

MF2 : Mécanique des fluides

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

**1<sup>ère</sup> question de cours : 3 questions du formulaire méca flu ci-dessous (questions 1 à 13).**

**2<sup>ème</sup> question de cours : questions 14 à 18**

**Rappel :** les expressions de la divergence et du gradient doivent être connues, en coordonnées cartésiennes. Elles sont fournies en coordonnées cylindriques.

$f(x, y, z)$  est un champ scalaire quelconque.  $\vec{A}(x, y, z)$  est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation  $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \\ A_z \end{pmatrix}$

On introduit le "vecteur" nabla :  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ . Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de

retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\vec{\text{grad}} f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
Divergence $\text{div } \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base :  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right] \cdot \vec{u}_r + \left[ \frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right] \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right] \cdot \vec{u}_z$$

1) Force de pression subie par une particule sur sa frontière :

$$\overline{dF_S} = p \cdot \overline{dS} = p \cdot dS \cdot \vec{n}$$

2) Relation Fondamentale de la Statique des Fluides :

$$\overline{\text{grad}}(p) = \rho \vec{g}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \text{ si } z \text{ orienté vers le haut (verticale ascendante)}$$

$$\frac{dp}{dz} = +\rho \cdot g \text{ si } z \text{ orienté vers le bas (verticale descendante)}$$

3) Relation Fondamentale de la Statique des Fluides **incompressibles** ( $\rho = \text{cte}$ ) :

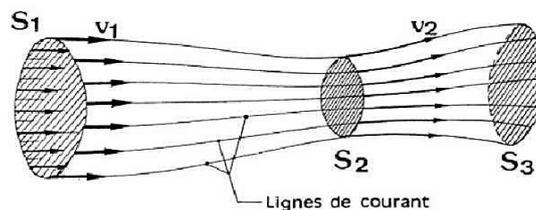
$$p_{\text{bas}} = p_{\text{haut}} + \rho \cdot g \cdot h$$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \text{ (si axe } z \text{ orienté vers le haut)}$$

$$p_1 - \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 - \rho \cdot g \cdot z_2 \text{ (si axe } z \text{ orienté vers le bas)}$$

4) **Ligne de courant** : Ligne orientée tangente (en chacun de ses points) à la vitesse eulérienne à la date  $t$ .

5) **Tube de courant** : Ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



6) Vecteur **densité de courant de masse**  $\vec{J}_M(M, t)$  :

$$\vec{J}_M(M, t) = \rho(M, t) \cdot \vec{v}(M, t)$$

Unités :  $\rho$  masse volumique du fluide en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$$v = \|\vec{v}\| \text{ en } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$J_M = \|\vec{J}_M\| \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

7) **Débit massique**  $D_M$  à travers une surface ( $\Sigma$ ) :

$$D_M(\mathbf{M}, t) = \frac{dm}{dt}(\mathbf{M}, t) = \iint_{\Sigma} \vec{J}_M(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \rho(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{dS} \quad \text{Unité : kg.s}^{-1}$$

8) **Débit volumique**  $D_V$  à travers une surface ( $\Sigma$ ) :

$$D_V(\mathbf{M}, t) = \frac{dV}{dt}(\mathbf{M}, t) = \iint_{\Sigma} \vec{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{dS} \quad \text{Unité : m}^3.\text{s}^{-1}$$

9) **Equation locale de conservation de la masse :**

$$\text{div}(\vec{J}_M) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{cas général})$$

$$\frac{\partial j_M}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{à une dimension})$$

10) **Ecoulement compressible / incompressible :**

$\text{div}(\vec{v}) \neq 0$  : Ecoulement compressible

$\text{div}(\vec{v}) = 0$  : Ecoulement incompressible

11) **Ecoulement rotationnel / irrotationnel :**

$\vec{rot}(\vec{v}) \neq \vec{0}$  : Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

$\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$  : Ecoulement irrotationnel

12) Donner une des 3 relations de **Bernoulli** ci-dessous, dans le cas d'un écoulement **sans machine hydraulique et sans perte**. Préciser les conditions d'application. Préciser l'unité des différents termes.

Conditions : fluide en écoulement stationnaire et incompressible, sans machine hydraulique et sans perte, sur une ligne de courant :

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \quad (1) \quad \text{Unités : J.kg}^{-1}$$

$$p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s = p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e \quad (2) \quad \text{Unités : Pa ou J.m}^{-3}$$

$$D_m \left( \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g \cdot z_s \right) = D_m \left( \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g \cdot z_e \right) \quad (3) \quad \text{Unités : W}$$

$p_e$ ,  $p_s$  : pressions du fluide en entrée, sortie (Pa)

$v_e$ ,  $v_s$  : vitesses du fluide en entrée, sortie du système (m.s<sup>-1</sup>)

$z_e$ ,  $z_s$  : altitudes du fluide en entrée, sortie du système (m.s<sup>-1</sup>)

$\rho$  : masse volumique du fluide (incompressible) (kg.m<sup>-3</sup>)

$g$  : accélération de la pesanteur (m.s<sup>-2</sup>)

$D_m$  : débit massique lors de l'écoulement **stationnaire** (kg.s<sup>-1</sup>)

$D_v$  : débit volumique lors de l'écoulement **stationnaire incompressible** ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )

- 13) Donner une des 4 relations de **Bernoulli** ci-dessous, dans le cas d'un écoulement **avec machine hydraulique et avec perte de charge**. Préciser les conditions d'application. Préciser l'unité des différents termes.

Conditions : fluide en écoulement stationnaire et incompressible, avec machine hydraulique et avec perte de charge, sur une ligne de courant :

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2\right) = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1\right) + E_{mach} - E_{ch} \quad (1)$$

Unités :  $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$

$E_{mach}$  : Energie massique utile de la machine hydraulique ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ ),  $> 0$  si pompe,  $< 0$  si turbine

$E_{ch}$  : Pertes de charge massique lors de l'écoulement ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ )

$$\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gz_2\right) = \left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gz_1\right) + E_{vmach} - E_{vch} \quad (2)$$

Unités : Pa ou  $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$

$E_{vmach}$  : Energie volumique utile de la machine hydraulique ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ ),  $> 0$  si pompe,  $< 0$  si turbine

$E_{vch}$  : Pertes de charge volumiques lors de l'écoulement ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ )

$$D_m \cdot \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2\right) = D_m \cdot \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1\right) + P_{mach} - P_{ch} \quad (3)$$

Unités : W

$P_{mach}$  : Puissance utile de la machine hydraulique (W),  $> 0$  si pompe,  $< 0$  si turbine

$P_{ch}$  : Pertes de charge lors de l'écoulement (W)

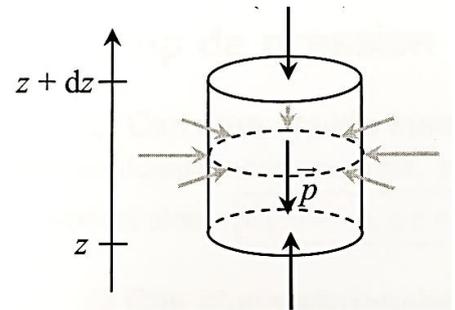
$$\left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2\right) = \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1\right) + H_{mach} - z_{ch} \quad (4)$$

Unités : mCF, mètre de colonne de fluide

$H_{mach}$  : Puissance utile de la machine hydraulique exprimée en mCF,  $> 0$  si pompe,  $< 0$  si turbine

$P_{ch}$  : Pertes de charge lors de l'écoulement, en mCF

14) Statique des fluides : A partir d'un Bilan des Actions Mécaniques Extérieures sur un l'élément de fluide ci-contre, établir l'expression de la Relation Fondamentale de la Statique des Fluides.



Élément de volume d'axe vertical, de section  $dS$  et de hauteur  $dz$  :

Hypothèse :  $dz \ll z$

$\rho(z)$  masse volumique à l'altitude  $z$

$\rho(z) = \text{cte}$  dans le cylindre

$p(z)$  pression à l'altitude  $z$

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) s'exerçant sur le cylindre :

- Poids du cylindre :

$$\vec{dP} = dm \cdot \vec{g} = \rho \cdot dV \cdot \vec{g} = -\rho \cdot dS \cdot dz \cdot g \cdot \vec{e}_z$$

- Les forces de pression sur les surfaces latérales se compensent
- Forces de pression sur les surfaces haute et basse :

$$\vec{dF}_S(z) = p(z) \cdot dS \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{dF}_S(z + dz) = -p(z + dz) \cdot dS \cdot \vec{e}_z$$

- Principe Fondamental de la Statique :

$$\vec{dP} + \vec{dF}_S(z) + \vec{dF}_S(z + dz) = \vec{0}$$

$$-\rho \cdot dS \cdot dz \cdot g \cdot \vec{e}_z + p(z) \cdot dS \cdot \vec{e}_z - p(z + dz) \cdot dS \cdot \vec{e}_z = \vec{0}$$

- Projection sur l'axe  $z$  :

$$-\rho \cdot dz \cdot g + p(z) - p(z + dz) = 0$$

$$p(z + dz) - p(z) = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

- Différenciation :

$$\frac{dp}{dz} \cdot dz = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \quad \text{Relation Fondamentale des la statique des Fluides (pour axe } z \text{ gradué vers le haut)}$$

15) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides  $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$ , établir l'expression de la pression  $p$  en fonction de l'altitude  $z$  dans le cas d'un liquide incompressible.

Fluide incompressible = Fluide dans lequel la masse volumique  $\rho$  est indépendante de la pression  $p$  et de l'altitude  $z$ .

Hypothèse :  $\rho = \text{constante} = \rho_0$

$$\frac{dp}{dz}(z) = -\rho_0 \cdot g$$

On intègre :

$$p(z) = -\rho_0 \cdot g \cdot z + cte$$

Condition aux Limites (C.L.) :

$$p(0) = cte = p_0$$

D'où :

$$p(z) = -\rho_0 \cdot g \cdot z + p_0$$

Ou on intègre par variables séparées :

$$dp = -\rho_0 \cdot g \cdot dz$$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^z -\rho_0 \cdot g \cdot dz$$

$$[p]_{p_0}^p = -\rho_0 \cdot g \cdot [z]_0^z$$

$$p - p_0 = -\rho_0 \cdot g \cdot z$$

Autres écritures possibles :

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$p_{bas} = p_{haut} + \rho \cdot g \cdot h$$

avec  $\rho = \text{constante}$  (fluide incompressible)

16) A partir de la Relation Fondamentale de la Statique des fluides  $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$ , établir l'expression de la pression  $p$  en fonction de l'altitude  $z$  dans le cas d'un gaz parfait isotherme. Définir la hauteur caractéristique  $H$  et vérifier l'homogénéité du résultat.

**Hypothèse :  $T = \text{constante} = T_0$**

$$pV = nRT \quad \text{d'où : } V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT_0}{p}$$

$$\text{Masse volumique du gaz : } \rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT_0} = \frac{Mp}{RT_0} \quad \text{avec } M = \frac{m}{n} \text{ masse molaire du gaz}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \text{ devient :}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mpg}{RT_0} = -\frac{Mg}{RT_0} p$$

En séparant les variables :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

Intégration par variables séparées :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT_0} dz = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz$$

$$[\ln p]_{p_0}^p = -\frac{Mg}{RT_0} [z]_0^z$$

$$\ln p - \ln p_0 = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} z$$

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec  $H = \frac{RT_0}{Mg}$  Hauteur caractéristique

Homogénéité :

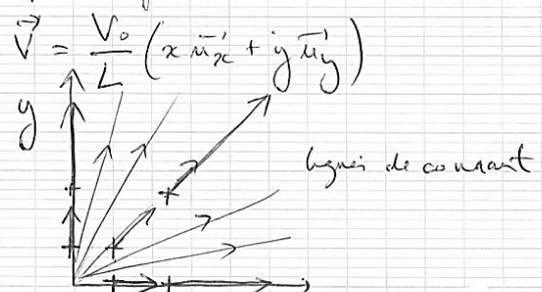
$$[H] = \left[\frac{RT_0}{Mg}\right] = \left[\frac{mRT_0}{Mmg}\right] = \left[\frac{nRT_0}{mg}\right] = \frac{J}{N} = \frac{N \cdot m}{N} = m$$

17) Soit le champ de vitesse  $\vec{V} = \frac{V_0}{L} \cdot (x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y)$

Où  $V_0$  et  $L$  sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence  $\text{div}(\vec{V})$  et son rotationnel  $\text{rot}(\vec{V})$ . Conclure.

1.  $\vec{V} = \frac{V_0}{L} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y)$



lignes de courant.

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \frac{V_0}{L}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

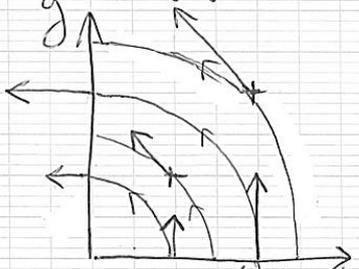
Ecoulement divergent  $\Rightarrow$  Compressible  
 Ecoulement non rotationnel  $\Rightarrow$  non tourbillonnaire

18) Soit le champ de vitesse  $\vec{V} = \frac{V_0}{L} \cdot (-y \cdot \vec{u}_x + x \cdot \vec{u}_y)$

Où  $V_0$  et  $L$  sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence  $\text{div}(\vec{V})$  et son rotationnel  $\text{rot}(\vec{V})$ . Conclure.

$$\vec{V} = \frac{V_0}{L} \cdot (-y \vec{u}_x + x \vec{u}_y)$$



$$\text{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Champ de vitesse à flux conservatif

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{2V_0}{L} \vec{u}_z$$

Écoulement non divergent  $\Rightarrow$  incompressible  
 Écoulement rotationnel  $\Rightarrow$  tourbillonnaire

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

### Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1. Description d'un fluide statique</b>	
Échelle mésoscopique	Définir et connaître des ordres de grandeurs des dimensions de l'échelle mésoscopique dans le cas des liquides et des gaz.
Pression dans un fluide Forces surfaciques, forces volumiques	Citer des ordres de grandeur de la pression. Définir la force de pression. Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Champ de pression Relation de la statique des fluides	Donner l'expression de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide. Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible pour l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un capteur de pression.</b>

<b>2. Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire</b>	
Grandeurs eulériennes Champ des vitesses Ligne de courant, tube de courant Régime stationnaire	Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes. <b>Analyser des vidéos, des simulations ou des cartographies.</b> Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses.
Débit volumique et débit massique	Exprimer les débits volumique et massique. Définir le vecteur densité de flux de masse.
Écoulement stationnaire dont le champ des masses volumiques est uniforme	Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire. Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses est à flux conservatif. Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à flux conservatif.
Écoulement stationnaire et irrotationnel	Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à circulation conservative.
Énergétique des écoulements parfaits dans une conduite	Définir un écoulement parfait. Énoncer, à l'aide d'un bilan d'énergie, la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier et d'illustrer la relation de Bernoulli.</b>
Perte de charge singulière et régulière.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique par frottement. <b>Mettre en évidence la perte de charge.</b>

Divergence.	Utiliser le théorème d'Ostrogradski fourni. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel	Utiliser le théorème de Stokes fourni. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.