DEVOIR SURVEILLE N°5

Durée de l'épreuve : 3 H

L'usage de la calculatrice est interdit.

CE SUJET EST LONG. IL NE S'AGIT PAS D'ESSAYER ABSOLUMENT DE LE FINIR, MAIS DE GERER AU MIEUX VOTRE TEMPS.

Lire tout l'énoncé avant de commencer, **numéroter** les feuilles et les questions, utiliser les **notations de l'énoncé**, apporter des **justifications** brèves mais précises et complètes, fournir des résultats **homogènes et encadrés** et des applications numériques **soulignées** et accompagnées d'une **unité.**

Calculatrice INTERDITE

PROBLEME 1 : COMBUSTION DU METHANE (EXTRAIT CONCOURS) (ENVIRON 20% DU BAREME)

- **Questions II.1 à II.9.**

La chaudière à cogénération produit de l'énergie thermique et électrique à partir du gaz naturel, le méthane CH_4 dont le comportement est assimilable à celui d'un gaz parfait.

Données :

- Pression standard : $p^\circ = 1,013.10^5$ Pa
- Enthalpies de formation :

Espèces chimiques	$CH_{4(g)}$	$CO_{2(g)}$	$O_{2(g)}$	$H_2O_{(g)}$
$\Delta_f H^\circ$ (en $kJ \cdot mol^{-1}$) à $T = 298$ K	$-74,85$	$-393,5$	0	$-241,9$

- Capacités thermiques molaires à pression constante :

Espèces chimiques	$N_{2(g)}$	$CO_{2(g)}$	$O_{2(g)}$	$H_2O_{(g)}$
$C_p{}^\circ$ (en $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$)	$29,1$	$37,1$	$29,4$	$33,6$

- Enthalpie standard de vaporisation de l'eau : $\Delta_{vap}H^\circ_m(T = 298\ K) = 44,0\ kJ \cdot mol^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

II.1. Quelle différence existe-t-il entre l'origine du gaz naturel, d'origine géologique, et celle des gaz commercialisés en bouteille comme le propane ou le butane ?

II.2. Écrire l'équation bilan de la combustion complète d'une mole de méthane avec le dioxygène contenu dans l'air.

II.3. Écrire l'équation de combustion incomplète d'une mole de méthane en admettant que celle-ci ne produise que du monoxyde de carbone CO et de l'eau.

II.4. Comparer les deux réactions et conclure quant à l'une des causes de formation du monoxyde de carbone. Pourquoi doit-on éviter la formation de monoxyde de carbone ?

On considèrera dans la suite du problème la combustion complète du méthane.

II.5. Calculer l'enthalpie de réaction $\Delta_r H^\circ(T = 298\ K)$ de cette réaction. On supposera que l'eau formée est sous forme de vapeur. Cette réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifier.

On pourra calculer une valeur approchée.

On donne : $\Delta_r H^0 = -\Delta_f H^0(CH_4) - 2.\Delta_f H^0(O_2) + \Delta_f H^0(CO_2) + 2.\Delta_f H^0(H_2O)$

On suppose que l'air est composé à 20% de dioxygène O_2 et à 80% de diazote N_2.

II.6. Estimer la température maximale théorique T_f des gaz produits lors de la combustion du méthane avec l'air dans les proportions stoechiométriques. On considèrera que la chaleur dégagée par la combustion est entièrement transférée pour échauffer les gaz présents de la température initiale $T = 298$ K à la température maximale T_f.

II.7. Pourquoi la température ainsi calculée est-elle supérieure à la température que l'on peut mesurer ?

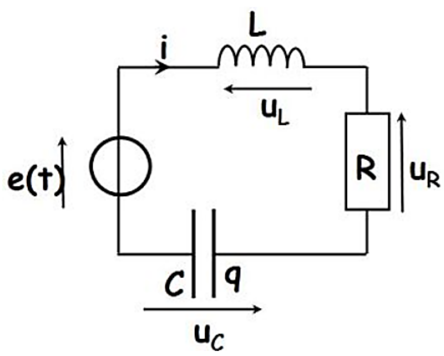
II.8. Calculer la quantité de méthane n présente dans un mètre cube normal, c'est à dire à la pression standard $p°$ et à la température $T = 298$ K.

On pourra calculer une valeur approchée.

II.9. En déduire le pouvoir calorifique inférieur P.C.I. du méthane, c'est à dire l'énergie thermique totale dissipée par la combustion d'un mètre cube normal de méthane, l'eau formée étant sous forme vapeur. On exprimera le résultat en $\mathrm{J/m^3}$.

PROBLEME 2 : ETUDE D'UN CIRCUIT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE (ENVIRON 30% DU BAREME)

Un générateur sinusoïdal alimente un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité *C*, d'une bobine parfaite d'inductance *L*, placés en série avec une résistance *R*. Le générateur est un générateur basse fréquence considéré comme parfait, délivrant un signal sinusoïdal $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ de pulsation ω.



A toute grandeur réelle $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est associée une grandeur complexe temporelle $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{U} e^{j\omega t}$, et $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$ son amplitude complexe. On rappelle que $j^2 = -1$.

L'intensité dans le circuit s'écrit : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$.

Le montage est donné figure 1 ci-contre :

1. Donner les expressions des grandeurs complexes temporelles $\underline{e}(t)$ et $\underline{i}(t)$.
2. Donner les expressions des impédances complexes de la bobine, de la résistance et du condensateur.
3. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ associée à la tension aux bornes du condensateur en fonction de l'amplitude complexe $\underline{E}$ et des caractéristiques des composants. Mettre $\underline{U_C}$ sous forme canonique :
$$\underline{U_C} = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$
où on exprimera *A*, ω_0 et *Q* en fonction des données du problème. On montrera notamment que $A = \underline{E} = E_m$.
4. En déduire l'expression de l'amplitude U_{Cm} de la tension aux bornes du condensateur.
5. Ecrire U_{Cm} en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, *Q* et E_m.

   Montrer que la tension $U_{Cm}(x)$ passe par un maximum pour $x = x_r$ si $Q > Q_{min}$.

   Déterminer Q_{min} et montrer que $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

   En déduire la pulsation de résonance ω_r. La comparer à ω_0.
6. Exprimer $U_{Cm}(\omega=\omega_0)$ en fonction de *Q* et E_m.
7. Déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit.

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = R_0\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$.

Préciser l'expression de R_0 en fonction de R.

8. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{\boldsymbol{I}}$ associée à l'intensité du courant traversant le circuit, en fonction de $\underline{E}$, R_0, Q, ω et ω_0.
9. En déduire l'expression de l'amplitude I_m de l'intensité dans le circuit.
   Mettre I_m sous la forme :
$$I_m(\omega) = \frac{A'}{\sqrt{1 + B^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$
   Donner les expressions de A' et B, en fonction de E_m, Q et R_0.
10. Montrer que $I_m(\omega)$ passe par un maximum pour $\omega = \omega'$, que l'on précisera. Donner l'expression de la valeur max I_{max} de $I_m(\omega)$, obtenue lorsque $\omega = \omega'$.
11. On donne, figure 2 ci-dessous, les graphes de U_{Cm} et I_m en fonction de la fréquence f, fréquence du générateur. L'échelle de gauche concerne U_{Cm} et l'échelle de droite concerne I_m . Identifier, en justifiant votre choix, les courbes $U_{Cm}(f)$ et $I_m(f)$ parmi les courbes (1) et (2).
12. Déterminer à partir de ces courbes : l'amplitude E_m de la tension aux bornes du générateur, la fréquence propre f_0, le facteur de qualité Q du circuit.

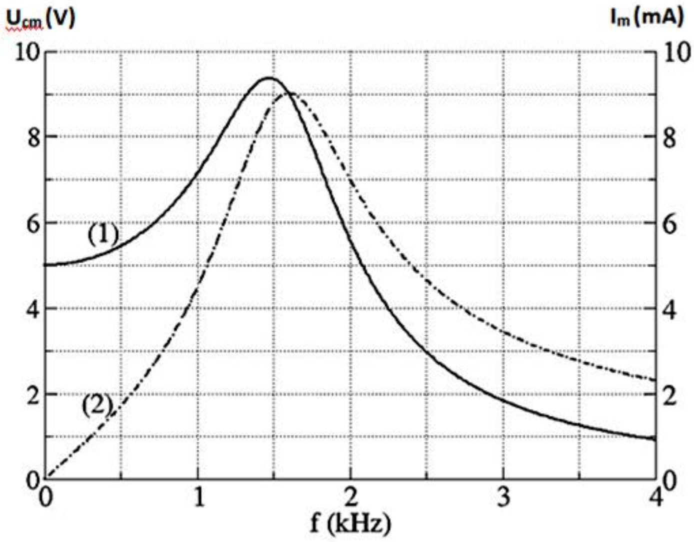


Figure 2

Problème 3 : Atmosphère terrestre en équilibre (Environ 15 % du barème)

Aide aux calculs :

exp(-1) ≈ 0,37

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé.

Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée M, sa pression p, sa température T et sa masse volumique ρ.

On désigne par p_0, T_0 et ρ_0 les valeurs de p, T et ρ au niveau du sol (où z = 0).

On donne : $p_0 = 10^5$ Pa ; $g = 10$ m.s^{-2} ; $R = 10$ J.K^{-1}.mol^{-1} ; $M = 30$ g.mol^{-1}

1. Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme T_0. On prendra $T_0 = 300$ K.

Q1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides.

Q2. Exprimer la masse volumique de l'air ρ en fonction de p, R, T_0 et M.

Q3. A partir des questions précédentes, montrer que l'expression p(z) peut s'écrire :

$$p(z) = p_0.\exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Donner l'expression de H en fonction de M, g, R et T_0.

Q4. Calculer H.

Q5. Calculer la pression de l'atmosphère lorsque z = H.

2. Atmosphère non isotherme

On prend maintenant en compte la variation de la température T en fonction de l'altitude z sous la forme : $T(z) = T_0\,(1 - \alpha z)$ où α est un constante positive.

Q6. Quelle est l'unité de α ?

Q7. Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{M.p.g}{R.T_0(1-\alpha z)}$$

Q8. Résoudre l'équation différentielle précédente, et montrer que l'on obtient la relation :

$$p(z) = p_0(1-\alpha z)^{\beta}$$

On montrera que : $\beta = \frac{M.g}{\alpha.R.T_0} = \frac{1}{\alpha.H}$

Q9. Calculer le coefficient β en prenant α = 0,025.

Q10. A partir de développements limités à l'ordre 1, montrer que, dans le cas où z << H, les 2 modèles, isotherme et non isotherme, aboutissent à la même loi p = f(z).

Q11. On donne ci-dessous les courbes T(z) et p(T) issues d'enregistrements. Commentez ces 2 courbes, notamment en expliquant en quoi elles confirment ou infirment le/les modèle(s) mathématiques retenus dans les questions précédentes.

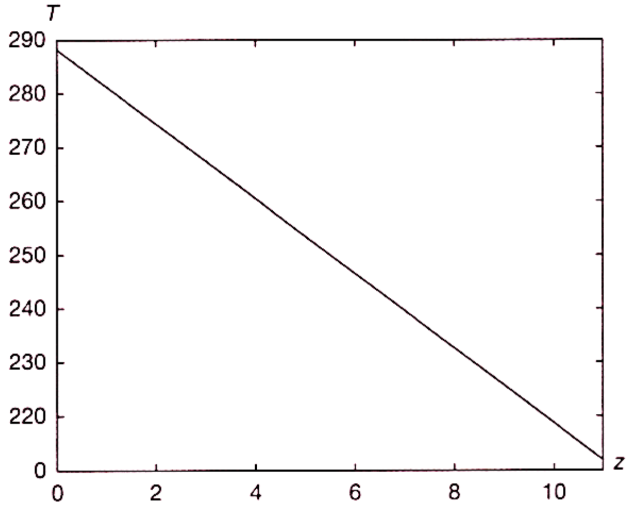


Figure 33

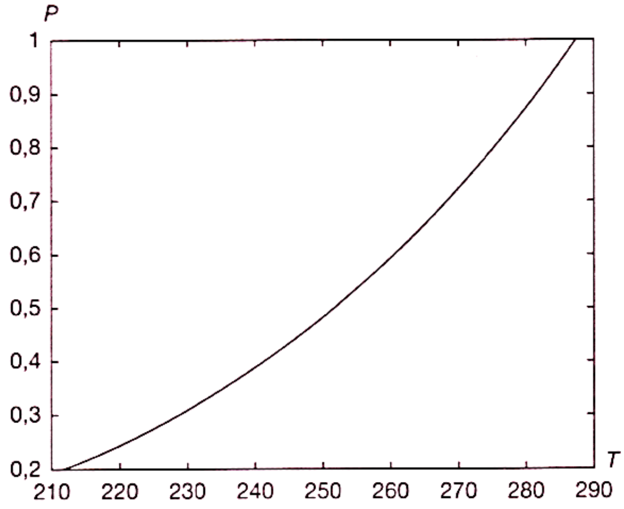


Figure 34

Problème 4 : fluides en écoulement (Environ 35 % du barème)

Préambule

Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}(-y.\vec{u}_x + x.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes.

1. Représenter quelques vecteurs vitesse et quelques lignes de courant (On pourra prendre $V_o.L = 1$ pour simplifier).
2. Exprimer la divergence $div(\vec{V})$. Le fluide est-il compressible ou incompressible ?
3. Exprimer le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Le fluide est-il tourbillonnaire ou non ?

Première partie : hotte aspirant de l'air (Extrait Concours)

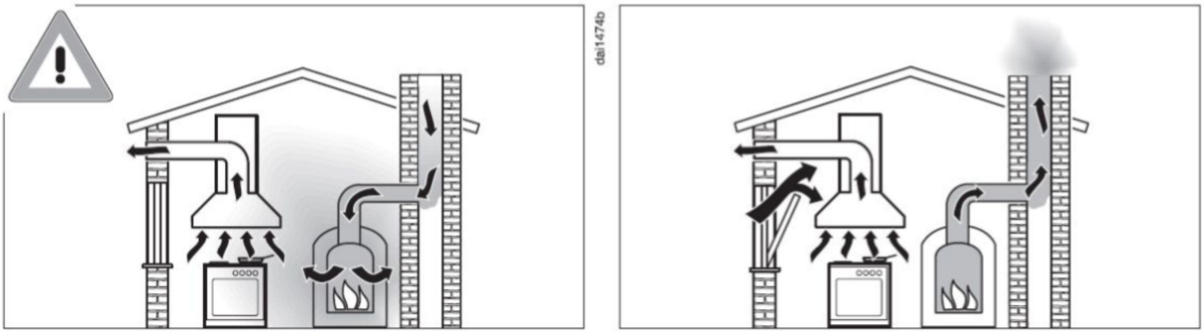
- **Questions 29) à 38).**

L'installation d'une hotte aspirante placée au-dessus d'une plaque de cuisson nécessite une réflexion avant achat. Par exemple, il convient d'apprécier le débit volumique d'air que le dispositif peut traiter afin de renouveler convenablement les gaz présents dans la cuisine.

A) Généralités

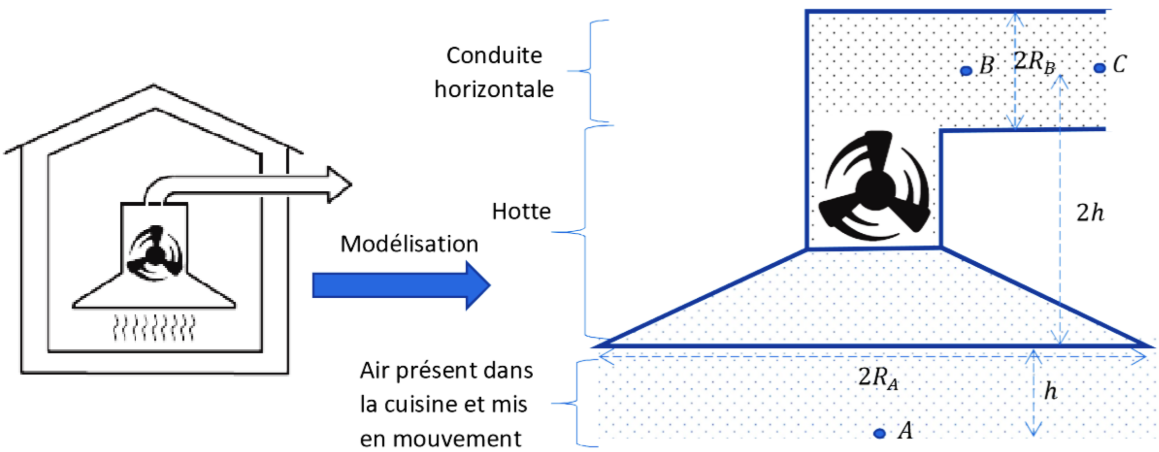
29) Pour assurer un bon renouvellement de l'air d'une cuisine, la hotte doit pouvoir déplacer 10 fois par heure le volume d'air de votre cuisine. Estimer le débit volumique D_v que la hotte doit imposer pour une cuisine de surface $20\ m^2$ et de $2,5\ m$ de hauteur de plafond.

30) Dans la documentation donnée par le constructeur MIELE™, on retrouve le schéma ci-dessous pour un système d'évacuation d'air vers l'extérieur. Expliquer, succinctement et clairement, pourquoi l'une des deux installations n'est pas acceptable.



Dans la suite, nous allons chercher à évaluer la puissance P_u qu'une hotte doit fournir à l'air ambiant pour qu'il soit évacué vers l'extérieur avec un débit volumique D_v. Nous travaillerons avec les hypothèses suivantes (dans le référentiel supposé galiléen lié à la cuisine où le champ de pesanteur terrestre est $g \approx 10\, m.s^{-2}$) :

- On négligera, dans un premier temps, la viscosité du gaz (et tout autre phénomène de diffusion).
- L'écoulement étudié est stationnaire et sa vitesse suffisamment faible pour considérer le fluide de masse volumique ρ uniforme.
- Le moteur de la hotte, avec ses pales, impose un écoulement contenu au sein même de la hotte, dans une canalisation horizontale menant le gaz à l'extérieur mais aussi dans un cylindre de hauteur h situé sous la hotte. Ce cylindre, de rayon R_A, est de même axe de symétrie de révolution que celui de la hotte (cf. schéma suivant).
- Les points B et C appartiennent à une même ligne de courant.
- En dehors de l'écoulement, l'air de la cuisine est au repos, à la pression atmosphérique $P_0 = 1\, bar$ et à la température $T_0 = 300\, K$.



B) <u>Etude entre les points B et C</u>

Le fluide étudié est dans la canalisation horizontale de rayon R_B constante. Le champ des vitesses est supposé horizontal et uniforme sur chaque section droite de cette canalisation. Les points B et C sont sur une même horizontale. Le point C, à l'extérieur, est à la pression atmosphérique. On note v_B et P_B la vitesse et la pression en B et v_C et P_C la vitesse et la pression en C.

31) Quelle est la relation entre v_B et v_C ? Justifier.
32) Démontrer en tenant compte des hypothèses que $P_B = P_0$.

C) <u>Etude entre les points A et B</u>

33) On a $R_A = 4R_B$. Justifier que $v_A \ll v_B$.
34) En effectuant un bilan de puissance entre A et B, on montre que :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) = \frac{P_u}{\rho D_v}$$

Préciser en quoi ce bilan se distingue de celui effectué avec la relation de Bernoulli appliquée à un écoulement conservatif.

35) Démontrer que $P_u \approx \rho D_v \left(3gh + \frac{D_v^2}{2\left(\pi R_B^2\right)^2}\right)$

D) <u>Bilan et analyse</u>

36) En utilisant le modèle du gaz parfait, exprimer puis calculer la masse volumique ρ du gaz étudié. On donne sa masse molaire $M \approx 30\ g.mol^{-1}$ et on prend $R \approx 10\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.
37) On considère : $h = 0{,}5\ m$, $R_B = 0{,}1\ m$, $D_v = 0{,}1\ m^3.s^{-1}$. Estimer la valeur de P_u. Cette valeur est-elle réaliste pour une hotte de cuisine ?

Une hotte doit aussi permettre le filtrage de l'air aspiré. Un filtre est alors placé en entrée de la hotte. Les molécules constituant le filtre retiennent certaines particules et l'air aspiré devient alors de meilleure qualité. La présence du filtre impose cependant de prendre en compte la viscosité de l'air qui entraîne un phénomène de perte de charge important entre les points A et B.

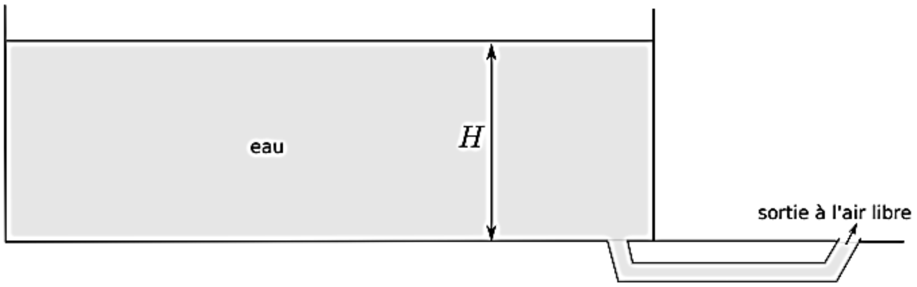
38) Pour un filtre encrassé utilisé en cuisine, on a un travail massique lié aux forces de viscosité de $1000\ J.kg^{-1}$. Estimer la puissance P_f que le moteur doit fournir pour cette seule perte de charge (on prendra encore $D_v = 0{,}1\ m^3.s^{-1}$). Conclure.

Deuxième partie : Vidange de l'eau d'une piscine (Extrait Concours)

- **Questions 36) à 44)**

III Vidange du bassin

On envisage de vider le bassin à l'aide d'un tuyau de section $S_t = 3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$ (rayon d'environ 10 cm). La situation simplifiée est schématisée ci-dessous. On note g l'intensité de la pesanteur, $H = 1{,}7\,\mathrm{m}$ la hauteur initiale d'eau et $S = 300\,\mathrm{m}^2$ la surface du bassin.



Document 10

III.1 Hypothèse d'un débit constant

36 - Faire les hypothèses nécessaires pour pouvoir exprimer la vitesse v d'écoulement au point de sortie à l'air libre en fonction de H et de g. Donner cette expression.

37 - En déduire une expression du débit volumique d'évacuation de l'eau.

38 - En supposant ce débit constant tout au long de la vidange, donner l'expression du temps nécessaire à la vidange complète du bassin, en fonction de H, S, S_t et g.

39 - L'application numérique donne une durée de 49 min. En réalité, ce temps sera-t-il plus court ou plus long ? Expliquer quelles en sont les raisons principales.

III.2 Hypothèse d'un débit variable

Dans la suite, on ne fait plus l'hypothèse du débit d'évacuation constant, et on souhaite à nouveau établir l'expression du temps de vidange. Le bassin est supposé de forme parallélépipédique comme sur le document 10. On note $h(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t. On a donc $h(0) = H$. On note $v(t)$ la norme de la vitesse en sortie du tuyau, et $v_0(t)$ celle de la surface libre de l'eau (au niveau de la surface S à l'air libre).

40 - Donner une relation entre $v_0(t)$, $v(t)$ et les surfaces S et S_t. Expliquer quelle hypothèse permet de l'établir.

41 - Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ est proportionnel à $\sqrt{h}$:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{h},$$

avec α une constante dont on donnera l'expression.

42 - Montrer que $h(t) = \left(A - \dfrac{\alpha\, t}{2}\right)^2$ est solution de l'équation précédente. Obtenir A à l'aide des conditions initiales.

43 - En déduire l'expression du temps de vidange du bassin.

44 - Comparer à l'expression obtenue précédemment sous l'hypothèse d'un débit volumique constant.