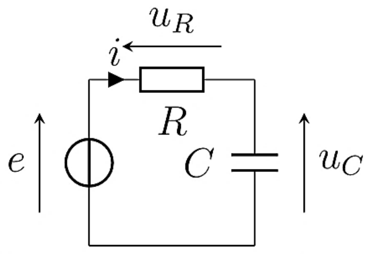
RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES (PYTHON) (1)

1) Equation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre constant

On donne le circuit électrique suivant, étudié en régime transitoire.

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{u_C}$.



Méthode d'Euler et application avec Python

Dans le cas du condensateur qui se charge, on doit résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e$$

u(t) est la tension aux bornes du condensateur.
e(t) est la tension « échelon » du générateur :

- Pour $t < 0,\ e(t) = 0$;
- Pour $t \geq 0,\ e(t) = E$.

On cherche à tracer la solution ***u*** en fonction de ***t***, sur un intervalle **[t_{min} ; t_{max}]**
La méthode d'Euler consiste à réaliser à :

- Découper l'intervalle [t_{min} ; t_{max}] en N segments,
- Définir le « pas » de résolution :

- Déterminer successivement les valeurs approchées de $u(t_i)$ en approchant la courbe, sur l'intervalle [t_i ; t_{i+1}] par sa tangente en t_i.

- Importer le fichier «EULER CIRCUIT RC à compléter» depuis l'ENT, l'ouvrir à l'aide de *Spyder* et l'enregistrer sous un autre nom dans votre compte ENT.
- Les caractéristiques du montage sont : R = 1kΩ ; C = 1µF. La tension *e(t)* est une fonction « échelon » : $e(t) = E_1$ = 0V pour $t < 0$; $e(t) = E_2$ = 10V pour $t > 0$. Compléter le programme.
- On cherche à tracer les courbes *e(t)* et *u(t)* entre *t* = - *tau* et *t* = *4*taux*. On découpera l'intervalle de temps en *N* = 100 valeurs. Compléter le programme.
- Construire le tableau des tensions d'entrée *e(t)* : Compléter le programme.
- Construire le tableau des tensions de sortie *s(t)*, le condensateur étant initialement déchargé : Compléter le programme.
- Compiler et lancer le programme.
- En modifiant la valeur de *N*, déterminer à partir de quelle valeur de *N* le programme est « performant ».
- Enregistrer votre fichier.

2) Equation différentielle non linéaire du premier ordre, avec second membre constant

Extrait ATS 2022 :

III La grêle

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

III.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\,\vec{e}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha\, v^2\, \vec{e}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}\pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0{,}5$.

31 - Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.

- A partir de l'équation différentielle de la vitesse *v(t)* obtenue à la question 31, écrire la relation entre *v(n+1)* et *v(n)* en utilisant la méthode d'Euler.

- Enregistrer le programme du 1) sous le nom « EULER CHUTE GRELON ».
- Modifier le programme afin de tracer la vitesse *v* en fonction du temps à partir de la méthode d'Euler.
- Etudier les influences d'une variation de la masse *m* et du coefficient *alpha* sur la vitesse limite.
- En modifiant la valeur de *N*, déterminer à partir de quelle valeur de *N* le programme est « performant ».
- Ecrire la relation entre la vitesse *v(t)* et la dérivée de l'altitude par rapport au temps $\frac{dz}{dt}(t)$. Intégrer cette expression, puis exprimer la relation entre *z(n+1)* et *z(n)*.

- Modifier le programme afin de tracer la vitesse *z* en fonction du temps.
- Enregistrer votre fichier.

Extrait ATS 2022 (suite) :

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours celles de la partie III.2. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en `Scilab` retranscrit ci-dessous :

```
g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02  // pas d'intégration en secondes
fin = 15   // durée de la simulation en secondes

t(1) = 0   // temps initial
z(1) = 0   // position initiale
v(1) = 0   // vitesse initiale

nb_iterations = int(fin/dt)
for i=1:nb_iterations
    t(i+1) = t(i) + dt
    z(i+1) = [case 1 à compléter]
    v(i+1) = [case 2 à compléter]
end
```

Les valeurs de `m` et `alpha` sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

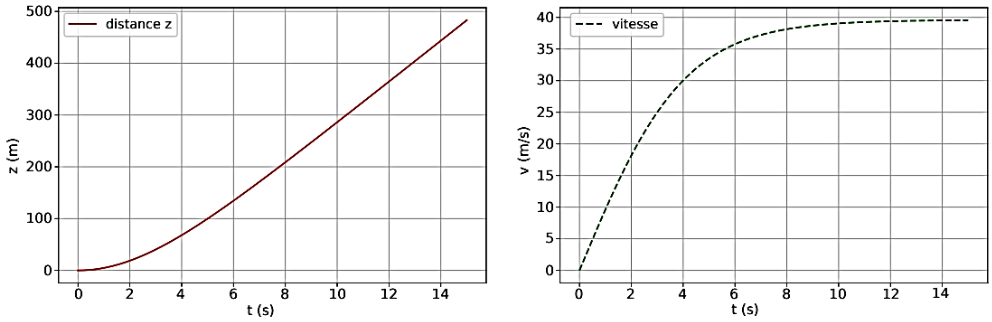
33 - Compléter la case 1 de l'algorithme.

34 - Compléter la case 2 de l'algorithme.

35 - Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenus par l'algorithme.

La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ?

Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.

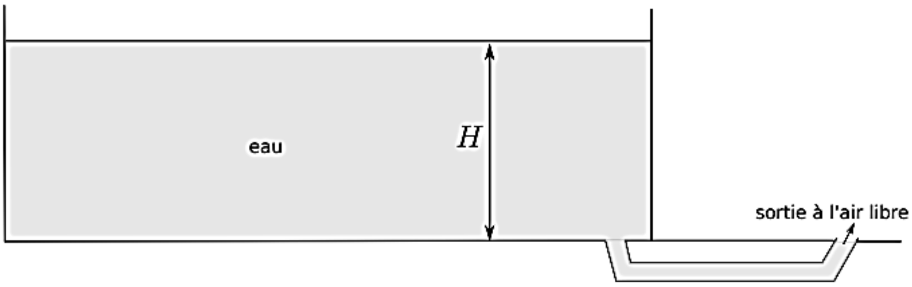


Document 9 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

Extrait ATS 2024 (et DS 5) :

III Vidange du bassin

On envisage de vider le bassin à l'aide d'un tuyau de section $S_t = 3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$ (rayon d'environ 10 cm). La situation simplifiée est schématisée ci-dessous. On note g l'intensité de la pesanteur, $H = 1{,}7\,\mathrm{m}$ la hauteur initiale d'eau et $S = 300\,\mathrm{m}^2$ la surface du bassin.



Document 10

III.2 Hypothèse d'un débit variable

Dans la suite, on ne fait plus l'hypothèse du débit d'évacuation constant, et on souhaite à nouveau établir l'expression du temps de vidange. Le bassin est supposé de forme parallélépipédique comme sur le document 10. On note $h(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t. On a donc $h(0) = H$. On note $v(t)$ la norme de la vitesse en sortie du tuyau, et $v_0(t)$ celle de la surface libre de l'eau (au niveau de la surface S à l'air libre).

40 - Donner une relation entre $v_0(t)$, $v(t)$ et les surfaces S et S_t. Expliquer quelle hypothèse permet de l'établir.

41 - Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ est proportionnel à $\sqrt{h}$:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{h},$$

avec α une constante dont on donnera l'expression.

- A partir de l'équation différentielle de la vitesse *h(t)* obtenue à la question 41, écrire la relation entre *h(n+1)* et *h(n)* en utilisant la méthode d'Euler.

- Enregistrer le programme du 2) sous le nom « EULER VIDANGE BASSIN ».
- Modifier le programme afin de tracer la vitesse *h* en fonction du temps à partir de la méthode d'Euler.
- Enregistrer votre fichier.