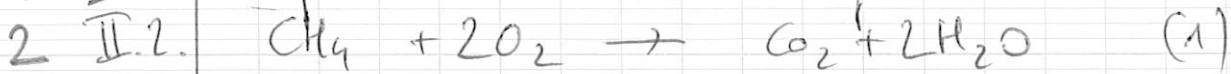


121

ATS 2011

Moteur / Σ fermé

1 II.1. propane et butane issus du pétrole

2 II.4. Réactio- (2) due à un manque d' O_2 / air -
monoxyde de carbone toxique!

II.5. $\Delta_r H^\circ (T = 298 \text{ K})$
 $= -\Delta_f H^\circ(\text{CH}_4) - 2\Delta_f H^\circ(\text{O}_2) + \Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) + 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O})$
 $= +74,85 - 1 \times 393,5 - 2 \times 241,9$
 $= -802,45 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

2 $\Delta_r H^\circ < 0$ - réaction - exothermique -

* Tableau d'arrangement.

II.6. $-n\Delta_r H^\circ = n(c_p(\text{CO}_2) + 2c_p(\text{H}_2\text{O}))(T_f - T_i) + 8n c_p(\text{N}_2)(T_f - T_i)$
 (Echauffement des produits).

$T_f - T_i = \frac{-\Delta_r H^\circ}{c_p(\text{CO}_2) + 2c_p(\text{H}_2\text{O}) + 8c_p(\text{N}_2)}$

$T_f = \frac{802,450}{37,1 + 2 \times 33,6 + 8 \times 29,1} + 298$
 $= 2678 \text{ K}$

1 II.7. Transformation non adiabatique en réalité -

II.8. $pV = nRT$ -

2
$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 10^5 \times 1}{8,31 \times 298}$$

$$= 40,9 \text{ mol.}$$
 -

II.9. $PCI = |n \cdot \Delta H_v|$ -

2
$$= 40,9 \times 802,45 \cdot 10^3$$

$$= 32,8 \text{ MJ} \cdot \text{m}^{-3}$$
 -

II.10. $PCS > PCI$ car condensation de l'eau exothermique.

II.11. $PCS = PCI + 2n \Delta_{\text{vap}} H^\circ(\text{H}_2\text{O})$
 II.12.
$$= 32,8 \cdot 10^6 + 2 \times 40,9 \times 44 \cdot 10^3$$

$$= 36,4 \text{ MJ} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$PCS = \frac{36,4 \cdot 10^6}{3,6 \cdot 10^6} \approx 10 \text{ kWh/m}^3 \quad (1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J})$$

Etude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé / 38

1. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$
 $\rightarrow e(t) = E_m e^{j\omega t}$

② $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$
 $\rightarrow i(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

③ 2. $\underline{z}_R = R$ $\underline{z}_C = \frac{1}{j\omega C}$
 $\underline{z}_L = j\omega L$

③ - Diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{E}} = \frac{\underline{z}_C}{\underline{z}_C + \underline{z}_R + \underline{z}_L} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} (x j\omega C)$$

$$= \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Donc :

2 $\underline{U}_C = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{E_m}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

On identifie à :

$$\underline{U}_C = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

⑤ $\begin{cases} A = E_m \\ LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ jRC\omega = j\frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$

$$4. U_{cm} = |U_c| = \left| \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \right|$$

$$\textcircled{1} \quad = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

$$1 \quad \text{7.} \quad U_{cm} = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

1 U_{cm} passe par un maximum si $(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ passe par un minimum.

$$\text{si } \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right) = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{d}{dx} = 0 \quad = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

si $x=0$ non retenu.

$$x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0$$

$$1 \quad x = x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

1 Il faut:

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$1 > \frac{1}{2Q^2}$$

$$1 < 2Q^2 \rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_{\min}$$

$$1 \quad \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \leq \omega_0 -$$

$$6. \text{ Pour } \omega = \omega_0,$$

$$1 \quad U_{cm} = \frac{A}{\sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2}} = QA -$$

$$1 \quad 7. \quad \underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{jC\omega} -$$

$$1 \quad = R \left(1 + j\frac{\omega L}{R} + \frac{1}{jRC\omega} \right) -$$

$$1 \quad = R_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) -$$

Identification:

$$1 \quad \begin{cases} R = R_0 - \end{cases}$$

$$\begin{cases} j\frac{\omega L}{R} = jQ \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -jQ \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{jRC\omega} = -j\frac{1}{RC\omega} \rightarrow \frac{1}{RC} = Q\omega_0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \times (2): \frac{L}{R^2 C} = Q^2 \rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (verif)} -$$

$$\frac{(2)}{(1)}: \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{L}{R}} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (verif)} -$$

$$\textcircled{1} 8. \quad \underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)} -$$

$$9. \quad I_m = |\underline{I}| = \frac{E_m}{R_0 \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (\div R_0)$$

$$\textcircled{3} \quad = \frac{\frac{E_m}{R_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad \left| \begin{array}{l} A' = \frac{E_m}{R_0} \\ B = Q \end{array} \right. -$$

1 10. I_m passe par un maximum si -

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0$$

③ | 1

$$\underline{\omega = \omega_0 = \omega'}$$

1 $I_m(\omega') = I_m(\omega_0) = \frac{E_m}{R}$ -

④ 1 1 11. Courbe (1): U_{cm} car $U_{cm} \xrightarrow[\substack{\omega \rightarrow 0 \\ f \rightarrow 0}]{A \neq 0} E_m$ -

1 1 Courbe (2): I_m car $I_m \xrightarrow[\substack{\omega \rightarrow 0 \\ f \rightarrow 0}]{} 0$ -

1 12. $E_m = A = U_{cm}(0) = 5V$ -

1 $f_0 = 1,6 \text{ kHz}$ - (Fréquence de résonance de l'antenne)

1 $Q = \frac{U_{cm}(f_0)}{E_m} = \frac{9}{5} = 1,8$ -

18 / DS 4 2 février Problème 3

(1) Q1. $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ -

1 Q2. $\rho = \frac{m}{V}$ avec $pV = nRT_0$ -
 $V = \frac{nRT_0}{p}$

(2) $\rho = \frac{m p}{nRT_0}$
 $\rho = \frac{M p}{RT_0}$ -

Q3. $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{M p}{RT_0} g$
 1 $\int \frac{dp}{p} = \int -\frac{Mg}{RT_0} dz$ -

$\left[\ln p \right]_{p_0}^p = -\frac{Mg}{RT_0} [z]_0^z$

$\ln p - \ln p_0 = -\frac{Mg}{RT_0} z$

(3) $\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z$

$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mg z}{RT_0}\right) = \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$ -

1 $p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ -

(1) Q4. $H = \frac{10 \times 300}{30 \cdot 10^{-3} \times 10} = \frac{3000}{300 \cdot 10^{-3}} = \frac{10 \cdot 10^3}{10} = 10 \text{ km}$ - 

(1) Q5. $z = H \Rightarrow p = p_0 \exp(-1) = 0,37 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

(1) Q6. α en m^3 -

Q7 $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$

①

$$p = \frac{p_0}{RT_0(1 - \alpha z)}$$

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{Mg}{RT_0(1 - \alpha z)}$$

Q8

$$\frac{dp}{p} = - \frac{Mg}{RT_0} \frac{1}{1 - \alpha z} dz$$

1

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^z - \frac{Mg}{RT_0} \frac{1}{1 - \alpha z} dz$$

$$\left[\ln p \right]_{p_0}^p = + \frac{Mg}{\alpha RT_0} \left[\ln(1 - \alpha z) \right]_0^z$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\alpha RT_0} \ln(1 - \alpha z)$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \ln(1 - \alpha z)^{\frac{Mg}{\alpha RT_0}}$$

$$\frac{p}{p_0} = (1 - \alpha z)^{\frac{Mg}{\alpha RT_0}} \rightarrow \beta$$

$$p = p_0(1 - \alpha z)^{\frac{Mg}{\alpha RT_0}} \quad (2)$$

Q10

DL d'ordre 1, expression (2)

$$p \approx p_0 \left(1 - \alpha \frac{Mg}{RT_0} z \right) = p_0 \left(1 - \frac{Mg}{RT_0} z \right)$$

DL d'ordre 1, expression (1)

$$p \approx p_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right) = p_0 \left(1 - \frac{Mg}{RT_0} z \right)$$

Q11.

T linéaire $\nrightarrow$ décroissant en fonction de z
 $\Rightarrow$ modèle non isotherme.

p fonction exponentielle de T mais
 linéarisable pour p proche de 1 bar

$\Rightarrow p$ fonction linéaire de T donc de z (DL) / 4

Q9.

$$\beta = \frac{Mg}{\alpha RT_0}$$

$$= \frac{30 \cdot 10^{-3} \times 10}{0,025 \times 10 \times 300}$$

$$= 4 \cdot 10^{-3} \quad 1$$

① ③

1

①

②

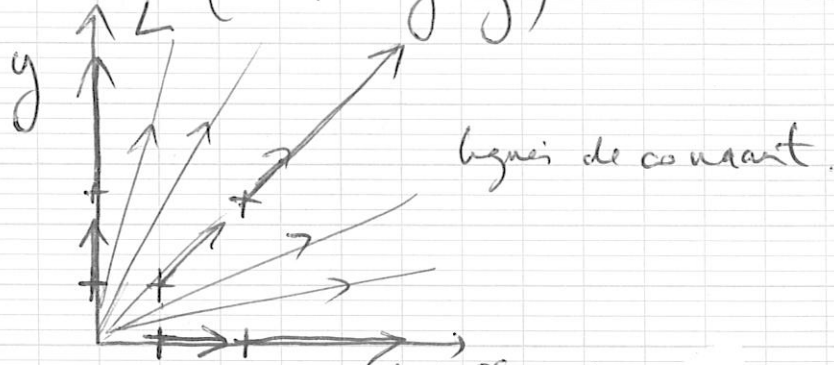
1

②



Mécanique des fluides

1. $\vec{V} = \frac{V_0}{L} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y)$



$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \frac{V_0}{L}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Écoulement divergent $\Rightarrow$ Compressible
Écoulement non rotationnel $\Rightarrow$ non tourbillonnaire

18 2. $\vec{V} = \frac{V_0}{L} (-y \vec{u}_x + x \vec{u}_y)$



2

2

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{V_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

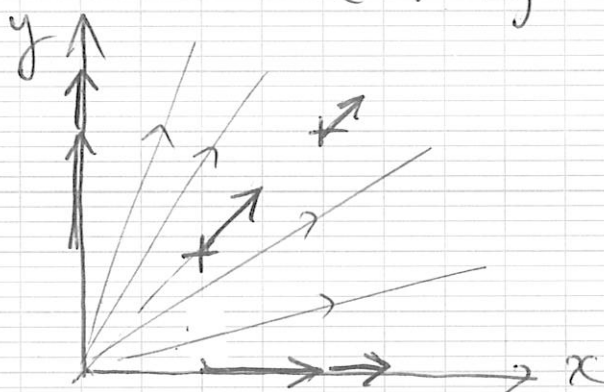
Champ de
vitesse à
flux
conservatif

$$2 \quad \vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{v_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v_0}{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{2v_0}{L} \vec{u}_z$$

1 Écoulement non divergent $\Rightarrow$ incompressible
 1 Écoulement rotationnel $\Rightarrow$ tourbillonnaire

$$3. \quad \vec{v}' = v_0 \cdot L \cdot \left(\frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y}{x^2 + y^2} \right)$$



$$\text{div} \vec{v} = v_0 L \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right] v_0 L$$

$$= v_0 L \left[\frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2+x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$= 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = v_0 L \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\left(\frac{v}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Champs des vitesses
à flux
conservatif

19/ Problème 3 (extrait ATB 2018)

29) $V_1 = 20 \times 2,5 = 50 \text{ m}^3$
 D'où le débit $10 \times 50 = 500 \text{ m}^3/\text{h}$

30) Installation - 1 inacceptable car aspiration des gaz brûlés du poêle par la hotte donc traversée de la pièce par des gaz brûlés

31) Écoulement stationnaire et incompressible ($\rho = \text{cte}$)
 $\Rightarrow Dv = \text{cte}$
 $= v_B S_B = v_C S_C$
 $S_B = S_C$
 $\Rightarrow v_B = v_C$

32) $v_B = v_C$
 $h_B = h_C$
 Bernoulli sans machine sans perte $\Rightarrow p_B = p_C = p_{\text{atm}} = p_0$

33) $Dv = v_A S_A = v_B S_B$
 $= v_A \pi R_A^2 = v_B \pi R_B^2$

$R_A = 4 R_B \Rightarrow v_B = 16 v_A$
 $\Rightarrow v_A = \frac{v_B}{16}$

34) * Bilan de puissances = justifié ou Bernoulli
 $\frac{p_B - p_A}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) = \frac{P_u}{\rho Dv}$
 cad $p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + \frac{P_u}{Dv}$

1 Non conservateur - de l'énergie : terme $\frac{P_u}{D_v}$ ✓

35) $z_B - z_A = 3R$ ✓ $D_v = \rho v_B \pi R_B^2$
 $= \rho v_A \pi R_A^2$
 $v_A \approx 0$

$$v_B = \frac{D_v}{\rho \pi R_B^2}$$

D'après 34):

② | $P_u = D_v (\cancel{p_B} - \cancel{p_A}) + D_v \left(\frac{1}{2} \cancel{v_B^2} - \frac{1}{2} \cancel{v_A^2} \right)$
 $+ D_v (p g z_B - p g z_A)$

1 (avec $v_A = 0$ ✓ $p_B = p_A = p_0$ ✓
 $z_B - z_A = 3R$

On obtient :

$$P_u = D_v \frac{1}{2} v_B^2 + D_v p g 3R$$

$$= D_v \frac{1}{2} \frac{\rho D_v^2}{(\pi R_B^2)^2} + D_v p g 3R$$

$$= D_v \rho \left(\frac{D_v^2}{2(\pi R_B^2)^2} + 3gR \right)$$

36) $pV = nRT$ $V = \frac{nRT}{p}$

1 $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m p}{n R T} = \frac{\rho p}{R T}$
 $= \frac{30 \cdot 10^{-3} \times 10^5}{10 \times \frac{300}{10}}$
 $= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ✓

37) $P_u = 1 \times 0,1 \times \left(\frac{0,1^2}{2 \times \pi^2 \times 0,1^4} + 3 \times 10 \times 0,5 \right)$

37) (suite)
En prenant $\pi^2 = 10$

$$P_u \approx 0,1 \times \left(\frac{10^{-2}}{2 \times 10 \times 10^{-4}} + 15 \right) \\ \approx 0,1 \times (5 + 15) = \underline{2 \text{ W}}$$

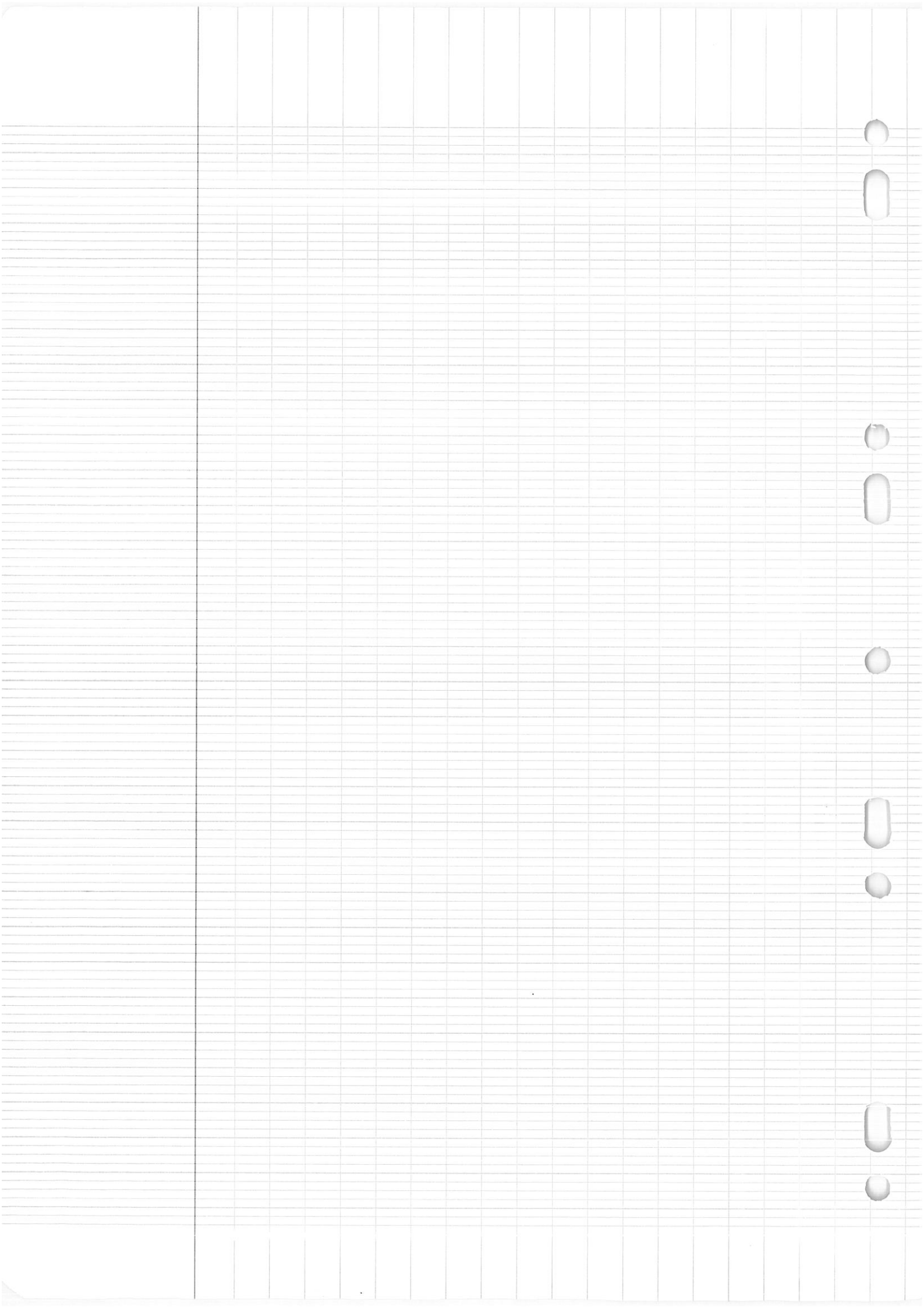
Non négligeable ! Puissance trop faible.

38) $1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

P_f en W cad $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$

$$P_f = 1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \times 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 0,1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \\ = \underline{100 \text{ W}}$$

Consommation électrique liée à la filtration
et non à la mise en mouvement du fluide.



III Vidange du bassin

III.1 Hypothèse d'un débit constant

- 36 - Je fais l'hypothèse d'un écoulement parfait et incompressible.

La conservation du débit volumique dans l'eau considérée comme un fluide incompressible implique $Q_v = S v_A = S_t v$ or $S_t \ll S \Rightarrow v_A \ll v$. Le niveau d'eau dans le bassin évoluant très lentement, je fais l'hypothèse d'un régime quasi stationnaire.

L'application du théorème de Bernoulli sur la ligne de courant AB donne

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_B \quad \text{et} \quad z_A - z_B = H \Rightarrow 2gH = v^2 - v_A^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gH} \quad \text{C'est la formule de Torricelli.}$$

$$37 - Q_v = S_t \sqrt{2gH}$$

- 38 - En faisant l'hypothèse d'un débit constant durant toute la vidange, le temps de vidange d'un

volume V d'eau est $t_v = \frac{V}{Q_v}$ or $V = HS \Rightarrow t_v = \frac{S}{S_t} \sqrt{\frac{H}{2g}}$

- 39 - Le temps réel sera plus long car

- quand le niveau d'eau baisse, le débit diminue $Q_v \propto \sqrt{H}$
- La viscosité de l'eau diminue les vitesses donc le débit.

III.2 Hypothèse d'un débit variable

- 40 - Dans l'eau, fluide incompressible, la conservation du débit volumique implique $S v_0(t) = S_t v(t)$

- 41 - Nous avons vu que la formule de Torricelli donne $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ donc $v_0(t) = \frac{S_t}{S} \sqrt{2gh(t)}$.

$$\frac{dh}{dt} = -v_0(t) = -\frac{S_t}{S} \sqrt{2gh(t)} \quad \text{Par identification avec} \quad \frac{dh}{dt} = -\alpha \sqrt{h(t)}, \text{ j'obtiens } \alpha = \frac{S_t}{S} \sqrt{2g}$$

- 42 - Pour $h(t) = \left(-\frac{\alpha t}{2} + A\right)^2$, j'obtiens $\frac{dh}{dt} = 2\left(-\frac{\alpha t}{2} + A\right)\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\alpha\left(-\frac{\alpha t}{2} + A\right) = -\alpha\sqrt{h}$.

$$h = \left(-\frac{\alpha t}{2} + A\right)^2 \quad \text{est solution de l'équation différentielle} \quad \frac{dh}{dt} = -\alpha\sqrt{h}$$

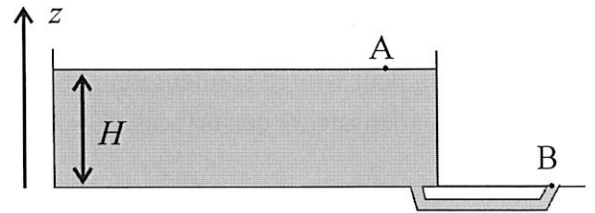
Je calcule la Constante d'Intégration avec la Condition Initiale $h(0) = H$

$$H = \left(-\frac{\alpha \times 0}{2} + A\right)^2 \Rightarrow A = \sqrt{H} \quad \text{L'expression est donc} \quad h = \left(-\frac{\alpha t}{2} + \sqrt{H}\right)^2$$

- 43 - Je note t'_v le temps de vidange ; $h(t'_v) = 0 \Rightarrow 0 = \left(-\frac{\alpha t'_v}{2} + \sqrt{H}\right)^2 \Rightarrow t'_v = \frac{2\sqrt{H}}{\alpha}$

$$44 - t'_v = \frac{2\sqrt{H}}{\alpha} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{S_t}{S} \sqrt{2g} \Rightarrow t'_v = \frac{2S}{S_t} \sqrt{\frac{H}{2g}} \quad t'_v = 2t_v$$

Le temps de vidange réel est le double de celui obtenu avec l'hypothèse du débit volumique constant.



II.2 Application au capteur de niveau d'eau

- 28 - On peut voir ce condensateur comme l'association en parallèle (même tension) de deux condensateurs de surfaces $S_1 = L(h-x)$ et $S_2 = Lx$ et de même épaisseur e : $C = C_1 + C_2$

$$C_1 = \frac{S_1 \epsilon_0}{e} \text{ et } C_2 = \frac{S_2 \epsilon_0 \epsilon_r}{e} \Rightarrow C = \frac{L(H-x)\epsilon_0}{e} + \frac{Lx\epsilon_0 \epsilon_r}{e} \Rightarrow$$

$$C = \frac{L(H-x)\epsilon_0}{e} + \frac{Lx\epsilon_0 \epsilon_r}{e} = \frac{L\epsilon_0}{e} (H + (\epsilon_r - 1)x)$$

Par identification avec $C = ax + b$, $\boxed{a = \frac{L\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{e}}$ et $\boxed{b = \frac{LH\epsilon_0}{e}}$

29 - $RC \frac{du}{dt} + u = RC \frac{de}{dt}$ s'écrit en notations complexe $jRC\omega \underline{U}_0 + \underline{U}_0 = jRC\omega A \Rightarrow \boxed{\underline{U}_0 = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} A}$

30 - $U_0 = |\underline{U}_0|$ donc $\boxed{U_0 = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} A}$

31 - En BF, $\boxed{\omega \ll \frac{1}{RC}}$ on a $\boxed{U_0 \sim_{BF} RC\omega A}$

32 - En BF, $U_0 \sim_{BF} R\omega A \frac{L\epsilon_0}{e} (H + (\epsilon_r - 1)x)$.

En réglant le montage (soit la fréquence, soit la résistance) pour être en BF, alors la tension mesurée aux bornes de la résistance est fonction affine de la hauteur d'eau.

$$U_0 \sim_{BF} U_{\text{vide}} + (U_{\text{plein}} - U_{\text{vide}}) \frac{x}{H} \quad U_{\text{vide}} = R\omega A \frac{LH\epsilon_0}{e} \quad U_{\text{plein}} = R\omega A \frac{LH\epsilon_0 \epsilon_r}{e} = \epsilon_r U_{\text{vide}}$$

II.3 Traitement des données

33 -

```
n = len(h)
somme = 0
for i in range(n):
    somme=somme+h[i]      # instruction 1
moyenne=somme/len(h)    # instruction 2
print(moyenne)          # affiche la moyenne
```

34 -

```
n = len(h)
somme = 0
for i in range(n):
    somme=somme+(h[i]-moyenne)**2
variance=somme/n
print(variance)          # affiche la variance
```

35 - $\boxed{u(h) = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{n}}}$