CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 17 (24 au 28 février 2025)

Chapitres étudiés et questions de cours :

MF2 : Mécanique des fluides T6 : Conduction thermique

Réponses attendues en bleu ou manuscrit.

1ère question de cours : 3 questions du formulaire méca flu et conduction thermique ci-dessous (questions 1 à 14).

2ème question de cours : questions 15 à 18

Rappel : les expressions de la divergence et du gradient doivent être connues, en coordonnées cartésiennes. Elles sont fournies en coordonnées cylindriques.

$f(x,y,z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x,y,z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z$

On introduit le "vecteur" nabla : $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div}\, \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$

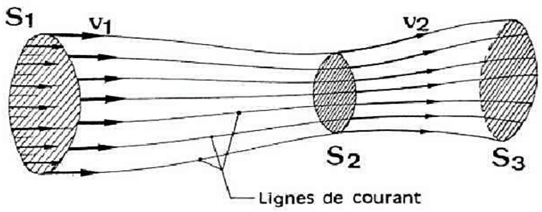
Données de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

Vecteurs de base : $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(a_z)}{\partial\theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z}\right].\overrightarrow{u_r} + \left[\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r}\right].\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r.a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta}\right].\overrightarrow{u_z}$$

1) **Ligne de courant** : Ligne orientée tangente (en chacun de ses points) à la vitesse eulérienne à la date t.
2) **Tube de courant** : Ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



3) Vecteur **densité de courant de masse** $\overrightarrow{j_M}(M,t)$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_M}(M,t) = \rho(M,t).\vec{v}(M,t)}$$

Unités : ρ masse volumique du fluide en kg.m^{-3}

$v = \|\vec{v}\|$ en m.s^{-1}

$\boldsymbol{j_M} = \|\overrightarrow{j_M}\|$ **en kg.m^{-3}. m.s^{-1} = kg.s^{-1}.m^{-2}**

4) **Débit massique D_M** à travers une surface (Σ) :

$$\boldsymbol{D_M(M,t) = \frac{dm}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \overrightarrow{j_M}(M,t).\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma \rho(M,t).\vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}}$$ Unité : kg.s^{-1}

5) **Débit volumique D_V** à travers une surface (Σ) :

$$\boldsymbol{D_V(M,t) = \frac{dV}{dt}(M,t) = \iint_\Sigma \vec{v}(M,t).\overrightarrow{dS}}$$ Unité : m^3.s^{-1}

6) Equation locale de conservation de la masse :

$$\boldsymbol{div(\overrightarrow{j_M}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \text{ (cas général)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial j_M}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \text{ (à une dimension)}$$

7) Ecoulement **compressible / incompressible :**

$div(\vec{v}) \neq 0$: Ecoulement compressible

$div(\vec{v}) = 0$: Ecoulement incompressible

8) Ecoulement **rotationnel / irrotationnel :**

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) \neq \vec{0}$: Ecoulement rotationnel ou tourbillonnaire

$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$: Ecoulement irrotationnel

9) Donner une des 3 relations de **Bernoulli** ci-dessous, dans le cas d'un écoulement **sans machine hydraulique et sans perte**. Préciser les conditions d'application. Préciser l'unité des différents termes.

Conditions : fluide en écoulement stationnaire et incompressible, sans machine hydraulique et sans perte, sur une ligne de courant :

$$\boldsymbol{\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s{}^2 + g.z_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e{}^2 + g.z_e} \qquad (1) \qquad \text{Unités : J.kg}^{-1}$$

$$\boldsymbol{p_s + \frac{1}{2}\rho v_s{}^2 + \rho g z_s = p_e + \frac{1}{2}\rho v_e{}^2 + \rho g z_e} \qquad (2) \qquad \text{Unités : Pa ou J.m}^{-3}$$

$$\boldsymbol{D_m\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s{}^2 + g.z_s\right) = D_m\left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e{}^2 + g.z_e\right)} \qquad (3) \qquad \text{Unités : W}$$

p_e , p_s : pressions du fluide en entrée , sortie (Pa)

v_e , v_s : vitesses du fluide en entrée , sortie du système (m.s^{-1})

z_e , z_s : altitudes du fluide en entrée , sortie du système (m.s^{-1})

ρ : masse volumique du fluide (incompressible) (kg.m^{-3})

g : accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

D_m : débit massique lors de l'écoulement **stationnaire** (kg.s^{-1})

D_v : débit volumique lors de l'écoulement **stationnaire incompressible** (kg.m^{-3})

10) Donner une des 4 relations de **Bernoulli** ci-dessous, dans le cas d'un écoulement **avec machine hydraulique et avec perte de charge**. Préciser les conditions d'application. Préciser l'unité des différents termes.

Conditions : fluide en écoulement stationnaire et incompressible, avec machine hydraulique et avec perte de charge, sur une ligne de courant :

$$\boldsymbol{\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2{}^2 + g z_2\right) = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1{}^2 + g z_1\right) + E_{m\,mach} - E_{m\,ch}} \qquad \textbf{(1)}$$

Unités : J.kg^{-1}

$\boldsymbol{E_{m\,mach}}$: Energie massique utile de la machine hydraulique (J.kg^{-1}), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$\boldsymbol{E_{m\,ch}}$: Pertes de charge massique lors de l'écoulement (J.kg^{-1})

$$\boldsymbol{\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g z_2\right) = \left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 + \rho g z_1\right) + E_{v\,mach} - E_{v\,ch}} \; \textbf{(2)}$$

Unités : Pa ou J.m^{-3}

$\boldsymbol{E_{v\,mach}}$: Energie volumique utile de la machine hydraulique (J.m^{-3})), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$\boldsymbol{E_{v\,ch}}$: Pertes de charge volumiques lors de l'écoulement (J.m^{-3})

$$\boldsymbol{D_m.\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2{}^2+gz_2\right)=D_m.\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1{}^2+gz_1\right)+P_{mach}-P_{ch}}\ \textbf{(3)}$$

Unités : W

$\boldsymbol{P_{mach}}$: Puissance utile de la machine hydraulique (W)), > 0 si pompe, < 0 si turbine

$\boldsymbol{P_{ch}}$: Pertes de charge lors de l'écoulement (W)

$$\boldsymbol{\left(\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2{}^2}{2g}+z_2\right)=\left(\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1{}^2}{2g}+z_1\right)+H_{mach}-z_{ch}}\ \ \textbf{(4)}$$

Unités : mCF, mètre de colonne de fluide

$\boldsymbol{H_{mach}}$: Puissance utile de la machine hydraulique exprimée en mCF, > 0 si pompe, < 0 si turbine

$\boldsymbol{P_{ch}}$: Pertes de charge lors de l'écoulement, en mCF

11) Définir le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q}$ par la loi de Fourier, la conductivité thermique λ (+ unité), le Flux thermique échangé(e) Φ_Q.

On définit le **vecteur densité de flux thermique** $\overrightarrow{j_Q}$:

$\overrightarrow{j_Q}(M,t)=-\lambda.\overrightarrow{grad T}(M,t)$ ou $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{j_Q}=-\lambda.\overrightarrow{gradT}}}$ **Loi de Fourier**

$\boldsymbol{j_Q}$ en W.m^{-2}

$\boldsymbol{\lambda}$: **conductivité thermique** du matériau (W.m^{-1}.K^{-1})

On définit la **Puissance thermique** ou **Flux thermique** échangé(e) $\boldsymbol{\Phi_Q}$:

$\Phi_Q(M,t)=\iint_S \overrightarrow{j_Q}(M,t).\overrightarrow{dS}$ ou $\boldsymbol{\Phi_Q=\iint_S \overrightarrow{j_Q}.\overrightarrow{dS}}$ en watts (W)

12) Donner les analogies entre grandeurs thermiques et grandeurs électriques.

Grandeur thermique	Grandeur électrique
$\boldsymbol{\overrightarrow{j_Q}=-\lambda.\overrightarrow{gradT}}$ Densité de flux thermique (W.m^{-2})	$\boldsymbol{\overrightarrow{j_e}=-\sigma.\overrightarrow{gradE}}$ Densité de courant (A.m^{-2})
T Température (K)	V Potentiel électrique (V)
λ Conductivité thermique (W.m^{-1}.K^{-1})	σ Conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)
$\Phi_Q=\iint_S \overrightarrow{j_Q}.\overrightarrow{dS}$	$I=\iint_S \overrightarrow{j_e}.\overrightarrow{dS}$

Flux ou puissance thermique (W)	Intensité électrique (A)
R_{th} Résistance thermique ($K.W^{-1}$)	R Résistance électrique (Ω ou $V.A^{-1}$)

13) Donner l'expression de la résistance thermique + unité.

$\boldsymbol{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$ **résistance thermique ($K.W^{-1}$)**

L : Longueur ou épaisseur (m)

S : Section ou surface (m^2)

$\boldsymbol{\lambda}$: **conductivité thermique** du matériau ($W.m^{-1}.K^{-1}$)

14) Dans le cas de l'échange conducto-convectif, donner l'expression de la densité de flux thermique + unité.

Flux thermique par unité de surface = densité de flux thermique ($W.m^{-2}$) :

$$\varphi_{CC} = -\lambda_{fluide}\left(\frac{T_{fluide}-T_{paroi}}{e}\right) = h.(T_{paroi} - T_{fluide})$$

e : épaisseur de la couche limite

$h = \frac{\lambda_{fluide}}{e}$ **, coefficient de transfert conducto-convectif**

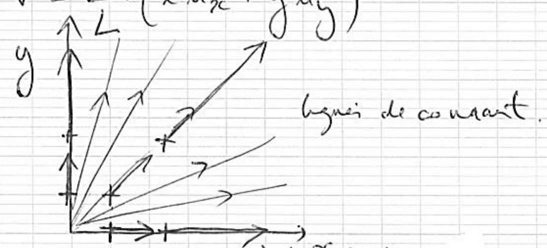
h **en $W.K^{-1}.m^{-2}$**

15) Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}.(x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Conclure.

1. $\vec{V} = \frac{V_0}{L}\left(x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}\right)$



$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = 2\frac{V_0}{L}$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$

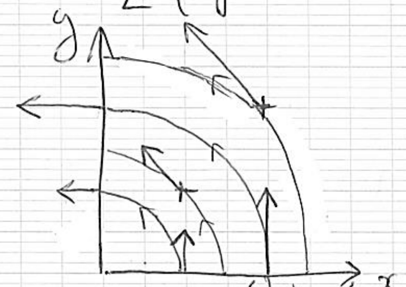
Ecoulement divergent $\Rightarrow$ Compressible
Ecoulement non rotationnel $\Rightarrow$ non tourbillonnaire

16) Soit le champ de vitesse $\vec{V} = \frac{V_o}{L}.(-y.\vec{u}_x + x.\vec{u}_y)$

Où V_o et L sont des constantes. Représenter quelques lignes de courant.

Calculer sa divergence $div(\vec{V})$ et son rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$. Conclure.

$\vec{V} = \frac{V_0}{L}.\left(-y\,\vec{u_x} + x.\vec{u_y}\right)$



$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = 0$

Champ de vitesse à flux conservatif

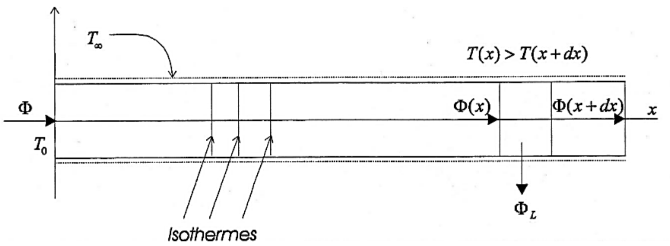
1

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{V_0}{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{2V_0}{L}\,\vec{u}_z$$

Écoulement non divergent ⇒ incompressible
Écoulement rotationnel ⇒ tourbillonnaire

17) Propagation de la chaleur dans une barre cylindrique calorifugée : réaliser un bilan de puissances, établir la relation $T(x)$ dans le cas du régime stationnaire.



Conditions aux limites : $T(x=0) = T_0$ $T(x=L) = T_1$

On étudie le phénomène en **régime stationnaire**.

⇨ $T(x,t) = T(x)$

Bilan des puissances thermiques entrantes dans un élément de longueur dx :

$$\Phi(x) - \Phi(x+dx)$$
$$= \iint_S \overrightarrow{J_Q}(x).\overrightarrow{dS}$$
$$- \iint_S \overrightarrow{J_Q}(x+dx).\overrightarrow{dS}$$
$$= \iint_S -\lambda.\overrightarrow{gradT}(x).\overrightarrow{dS}$$
$$- \iint_S -\lambda.\overrightarrow{gradT}(x+dx).\overrightarrow{dS}$$
$$= \iint_S -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}(x).\vec{u}_x.\overrightarrow{dS} - \iint_S -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}(x+dx).\vec{u}_x.\overrightarrow{dS} = -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x) + \lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x + dx) = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x)dx$$

Régime stationnaire

⇨ $\Phi(x) = \Phi(x+dx)$

⇨ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x) = 0$

⇨ $\boldsymbol{T(x) = ax + b}$

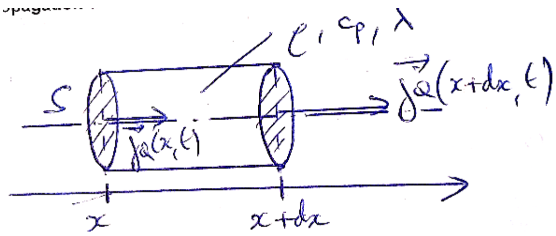
Conditions aux limites : $T(x = 0) = T_0$ $T(x = L) = T_1$

$T(0) = T_0 = a$ $T(L) = T_1 = aL + b$

⇨ $a = \frac{T_1 - T_0}{L}$

On obtient : $\boxed{\boldsymbol{T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0}}$

18) Propagation de la chaleur dans une barre cylindrique calorifugée : réaliser un bilan énergétique, établir l'équation de la chaleur, définir le coefficient de diffusion thermique D.



Système : Volume élémentaire dV de section S et de longueur dx : $dV = S.dx$

Variation élémentaire d'enthalpie pendant une durée élémentaire dt :

$$d^2H = c_P.dm.dT = c_P.\rho.dV.dT = c_P.\rho.S.dx.[T(x,t+dt) - T(x,t)] = c_P.\rho.S.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt$$

Bilan d'énergie dans un élément de longueur dx pendant la durée dt :

$$\delta^2 Q = [\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)]dt = \left[\mathrm{j}_Q(x,t) - \mathrm{j}_Q(x+dx,t)\right]dt = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x)dxdt$$

Premier principe entre les instants $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t+dt}$: $\boldsymbol{d^2H = \delta^2 Q}$

$$c_P.\rho.S.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt = +\lambda S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.dx.dt$$

Après simplification :

$$c_P.\rho.\frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\lambda}{c_P.\rho}.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

Equation de la diffusion thermique = Equation de la chaleur

$\boldsymbol{\frac{\lambda}{c_P.\rho} = D}$

D : coefficient de diffusion thermique ($m^2.s^{-1}$)

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

2. Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire	
Grandeurs eulériennes Champ des vitesses Ligne de courant, tube de courant Régime stationnaire	Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes. **Analyser des vidéos, des simulations ou des cartographies.** Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses.
Débit volumique et débit massique	Exprimer les débits volumique et massique. Définir le vecteur densité de flux de masse.
Écoulement stationnaire dont le champ des masses volumiques est uniforme	Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire. Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses est à flux conservatif. Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à flux conservatif.
Écoulement stationnaire et irrotationnel	Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à circulation conservative.
Énergétique des écoulements parfaits dans une conduite	Définir un écoulement parfait. Énoncer, à l'aide d'un bilan d'énergie, la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier et d'illustrer la relation de Bernoulli.**

Perte de charge singulière et régulière.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique par frottement. **Mettre en évidence la perte de charge.**

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'évaluer la conductivité thermique d'un matériau.**
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.
Équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle	Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.
Ondes thermiques	Établir une distance ou un temps caractéristique d'atténuation en utilisant le modèle de l'onde plane en géométrie unidirectionnelle.