T6 CONDUCTION THERMIQUE / TD

Exercice 1 : Salle de classe

1) Représenter la salle de classe en vue de dessus et représenter les différents vecteurs densité de courant thermique.

   Hypothèse : régime stationnaire. Les vecteurs densité de courant thermique sont perpendiculaires aux murs et pointent vers l'extérieur de la pièce.

2) Dans quel cas peut-on définir les résistances thermiques des différents éléments (fenêtres, murs, portes …) ?

   Dans le cas du régime stationnaire.

3) Préciser les unités de la résistance thermique, de la conductivité thermique.

   Résistance thermique en K/W, conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

On se place en régime stationnaire. La température de la salle est de 22°C, la température extérieure est de 5°C, la température des salles voisines est de 22°C, la température du couloir est de 15°C.

a) Quels sont les éléments (fenêtres, murs, portes …) traversés par la même densité de flux thermique ? Justifier. Donner la / les expressions du vecteur densité de flux thermique.

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda.\overrightarrow{gradT}$$

Le vecteur densité de flux thermique est lié à la conductivité thermique du matériau et au gradient de température, c'est à dire, en unidirectionnel, à la variation $\Delta T/\Delta x$. 2 éléments sont traversés par la même densité de flux thermique s'ils ont la même conductivité thermique, s'ils sont soumis au même delta T, et s'ils ont la même épaisseur. Par exemple : 2 fenêtres, même de taille différente.

b) Quels sont les éléments traversés par le même flux thermique ? Justifier. Donner la / les expressions du flux thermique.

En plus des conditions précédentes, il faut que les éléments aient la même surface, par exemple 2 fenêtres de même taille. En effet :

$$Flux\ thermique = \iint_S \vec{j}_Q.\overrightarrow{dS}$$

c) Les résistances thermiques de 2 fenêtres sont-elles en série ? en parallèle ? Justifier.

En parallèle, car soumises au même Delta T (en analogie électrique : soumis à la même tension).

d) Les résistances thermiques d'une fenêtre et de la porte sont-elles en série ? en parallèle ? Justifier.

Ni en série ni en parallèle, car ni soumises au même Delta T (en analogie électrique : même tension) ni traversées par le même flux thermique (en analogie électrique : même courant).

e) Dans quel cas peut-on additionner les résistances thermiques ?

Résistances thermiques en série.

f) Dans quel cas peut-on additionner les conductivités thermiques ?

Jamais ! Sauf éventuellement pour des résistances thermiques en parallèle, avec même conductivité thermique et même épaisseur (voir formule de la résistance thermique).

g) Comment pourrait-on calculer la puissance thermique nécessaire pour maintenir la salle de classe à température ?

$$P = \sum \frac{\Delta T_i}{Rth_i}$$

Exercice 2 : Laplacien

1) Dans quel cas peut-on écrire que le Laplacien scalaire de la température est nul ?

   En régime stationnaire (voir équation de la chaleur).

2) Que devient la relation précédente dans le cas de propagation de la chaleur unidimensionnelle ?

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

3) Résoudre cette équation et exprimer la température en fonction d'une grandeur spatiale et de 2 constantes à déterminer. Comment déterminer ces 2 constantes ?

   On obtient : T(x)=Ax+B, A et B à déterminer en fonction de 2 conditions aux limites.

4) Redémontrer l'expression de la résistance thermique.
   Voir cours.

Exercice 3 : Equation de la chaleur

1) Etablir l'équation de la chaleur sur un cylindre de longueur dx, calorifugé sur ses surfaces courbes, et voyant un flux thermique entrant sur le disque en x et un flux sortant sur le disque en $(x + dx)$.
   Voir cours.
2) Faire apparaître le coefficient de diffusion thermique. Quelle-est son expression ? Quelle-est son unité ?
   Voir cours.
3) Calculer le temps caractéristique de diffusion thermique dans un matériau de longueur 10 m de coefficient de diffusion thermique D = 10^{-6} $m^2.s^{-1}$.

$$\tau = \frac{L^2}{D}$$

   On obtient : 10^8 s ≈ 3 ans

Exercice 4 : Température dans une barre solide (E. Thibierge)

On s'intéresse au transfert thermique dans une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface est calorifugée. La barre est faite d'un matériau de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures T_1 et T_2. On admet que le champ de température dans la barre ne dépend que de x et de t.

1 - Établir l'équation de la chaleur. Définir le coefficient de diffusion thermique D.

2 - En supposant la barre initialement à une température uniforme, estimer la durée du régime transitoire. Commenter le résultat. Quelle est l'influence des températures T_1 et T_2 ?

3 - Déterminer le profil de température $T(x)$ en régime permanent. Le tracer.

4 - Montrer que le flux thermique dans la barre ne dépend pas de x. En déduire la résistance thermique de la barre.

5 - En appliquant le second principe de la thermodynamique à la barre en régime permanent, exprimer le taux de production d'entropie $\delta S_c/\mathrm{d}t$ (quantité d'entropie crée par unité de temps). Interpréter le résultat.

$\boxed{1}$ Cf. cours,

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{\kappa}{\rho c}\,.$$

$\boxed{2}$ La durée τ du régime transitoire dépend de la diffusivité D et de la longueur L de la barre. Par analyse dimensionnelle (cf. cours là encore),

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

Les températures T_1 et T_2 n'interviennent pas, seuls les paramètres caractéristiques de la barre (et pas de son environnement) interviennent.

$\boxed{3}$ En régime permanent, l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = a \qquad \text{et} \qquad T = ax + b$$

en intégrant deux fois. En tenant compte des conditions aux limites (cf. cours toujours),

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1\,.$$

$\boxed{4}$ Le flux thermique orienté selon $\vec{u}_x$ vaut

$$\phi(x) = \iint \vec{j}\,(x)\cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_x = j_{\text{th}}(x)\,S = -\kappa\,S\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\phi(x) = \frac{\kappa\,S}{L}(T_1 - T_2)\,,}$$

qui ne dépend pas de x. Par définition de la résistance thermique, $T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\,\phi$ donc par identification

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{L}{\kappa S}}$$

$\boxed{5}$ Appliquons le second principe à la barre toute entière entre t et $t + \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \delta S_e + \delta S_c$$

L'entropie échangée est fournie par les thermostats,

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{+\phi\,\mathrm{d}t}{T_1} + \frac{-\phi\,\mathrm{d}t}{T_2}$$

En régime permanent, l'entropie de la barre est constante d'où

$$\mathrm{d}S = 0 = \delta S_c + \phi\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

et d'après la question précédente

$$\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_{\text{th}}}\,\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}}$$

Le taux de production d'entropie est toujours strictement positif si $T_1 \neq T_2$, ce qui confirme que la diffusion thermique est un **phénomène irréversible**.

Exercice 5 : Optimisation thermique d'une pièce (TSI CCINP 2017)

Données

Surface au sol : $80\,\text{m}^2$; largeur : $10,0\,\text{m}$; longueur : $8,0\,\text{m}$; hauteur sous plafond : $3,0\,\text{m}$
Tous les murs donnent sur l'extérieur
Température intérieure : $T_0 = 20,0\,°\text{C}$, supposée uniforme
Température extérieure : $T_1 = 5,0\,°\text{C}$, supposée uniforme
Surface vitrée : deux baies vitrées de $6,0\,\text{m}^2$ chacune
Épaisseur de vitre : $e = 4,0\,\text{mm}$
Conductivités thermiques (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) :
$\lambda_v = 1,0$; $\lambda_{air} = \dfrac{1}{3}10^{-1} \simeq 0,033$; $\lambda_{ar} = 0,020 = \dfrac{1}{5}10^{-1}$
Capacité thermique de la pièce : $C = 3,0\cdot 10^5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
Puissance développée par la pompe à chaleur : $P = 300\,\text{W}$
Masses molaires atomiques (en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$) : $M(H) = 1,0$; $M(C) = 12,0$; $M(O) = 16,0$
Numéros atomiques : $Z(H) = 1$; $Z(C) = 6$; $Z(O) = 8$
Masse volumique de l'éthanol : $\rho = 0,80\,\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$

Aides au calcul

$46/11 \simeq 4,2$	$52/3 \simeq 17$
$11/46 \simeq 0,24$	$3/52 \simeq 5,8\cdot 10^{-2}$
$5,0/46 \simeq 0,11$	$52\times 3 \simeq 1,6\cdot 10^2$
$46/5,0 \simeq 9,2$	$\ln(3/2) \simeq 0,41$

I.1. Intérêt d'un double vitrage

Parmi les différents éléments constitutifs d'une habitation, les fenêtres jouent un rôle important dans le comportement thermique de l'habitation.
On cherche ici à montrer l'intérêt d'utiliser un double vitrage en commençant par étudier l'effet d'un simple vitrage.

On s'intéresse d'abord à un simple vitrage. On considère une paroi vitrée de surface S, d'épaisseur e, homogène, de conductivité thermique λ_v, constante et uniforme dans la paroi (voir **figure 1**).

On ne tient compte que des transferts thermiques par conduction. On considère la conduction comme unidimensionnelle selon $\vec{e_x}$ et en régime stationnaire. Ainsi, les grandeurs ne dépendent que de x.

On note $\Phi(x)$ le flux thermique à travers une surface S constante et $j_{th}(x)$ la densité surfacique de flux thermique.

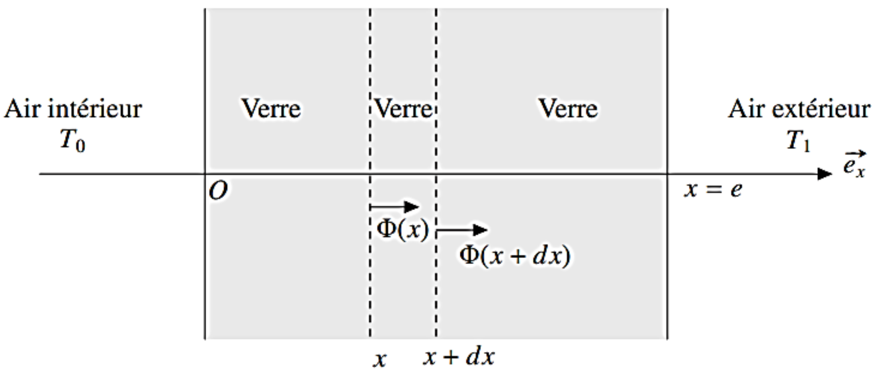


Figure 1 – Simple vitrage

Q1. Rappeler la loi de Fourier tridimensionnelle, qui régit le transfert thermique par conduction, ainsi que sa simplification dans le cas unidimensionnel selon $\vec{e_x}$.

Q2. Donner la relation entre $\Phi(x)$ et $j_{th}(x)$.
Donner l'unité dans le Système International de $\Phi(x)$.

Q3. On rappelle que l'on se place en régime stationnaire. Justifier que le flux thermique est alors le même à travers toutes les sections de la paroi.

Q4. En déduire que la température varie suivant une fonction affine de la position x à travers la paroi vitrée.

Q5. Déterminer cette fonction affine en fonction de T_0, température à l'intérieur de la pièce et de T_1, température à l'extérieur de la pièce.

Q6. Tracer l'allure de la courbe représentative de $T(x)$ pour $x \in [-e, 2e]$.

Dans le cas présent, on peut définir la résistance thermique R_{th} d'une paroi de surface S (exemple : vitre, mur, ...) par la relation $R_{th} = \dfrac{\Delta T}{\Phi}$, avec ΔT la différence de température entre les deux extrémités de la paroi et Φ le flux thermique à travers la surface S de la paroi.

Q7. R_{th} étant définie positivement, donner l'expression de R_{th} pour la paroi vitrée de surface S en fonction de e, λ_v et S.

Q8. Faire l'application numérique avec les valeurs proposées dans les données pour une baie vitrée en simple vitrage.

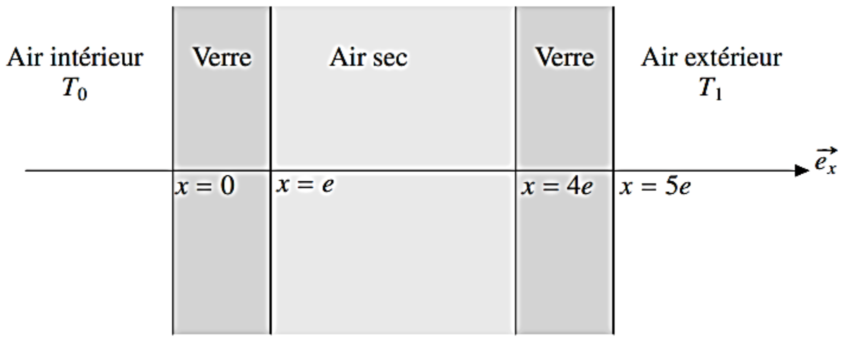


Figure 2 – Double vitrage

On considère désormais une baie vitrée de même surface mais en double vitrage. Elle est composée de deux parois vitrées identiques de surface S, d'épaisseur e, homogènes, de conductivité thermique λ_v, séparées par une couche d'air sec homogène, de surface S, d'épaisseur $3e$ et de conductivité thermique λ_{air} (voir **figure 2**).

On considère à nouveau qu'il n'y a que des transferts thermiques par conduction, sans mouvement fluide dans la couche d'air sec.

Comme en **Q3**, le flux, noté ici Φ', est le même à travers toutes les sections de la paroi entre $x = 0$ et $x = 5e$.
On note R_{tot} la résistance thermique totale de la paroi.

Q9. Quelle analogie peut-on faire avec les résistances électriques ?

Q10. Exprimer R_{tot} pour la paroi double vitrage en fonction de S, e, λ_{air} et λ_v.

Q11. Calculer numériquement R_{tot} pour une baie vitrée en double vitrage. Commenter.

Q1. $\vec{j_{th}} = -\lambda_v \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Si unidimensionnel selon $\vec{e_x}$:

$\vec{j_{th}} = -\lambda_v \frac{dT}{dx} \vec{e_x}$

Q2. $\phi(x) = \iint_S \vec{j_{th}} \cdot \vec{dS} = j_{th} \cdot S$

$\phi(x) = S \cdot j_{th}$ $\quad \phi(x)$ en W

Q3. Régime stationnaire $\Rightarrow$ Flux conservatif. $\quad \text{div}\, \vec{j_{th}} = 0$

Q4. $\text{div}(\vec{j_{th}}) = 0$

$-\lambda_v \frac{d^2T}{dx^2} = 0$

Par intégration :

$\frac{dT}{dx} = a$

Par intégration :

$T(x) = ax + b$

$\Delta T = 0$

(Laplacien)

$\Leftrightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) = 0$

$\Leftrightarrow \text{div}(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T) = 0$

$\Leftrightarrow \text{div}\, \vec{j_{th}} = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(j_{th}(x)) = 0$

$j_{th}(x) = j_{th}(x+dx)$

$\phi(x) = \phi(x+dx)$

Q5. $T(x) = ax + b$

Conditions aux limites

$T(0) = T_0 \Rightarrow b = T_0$

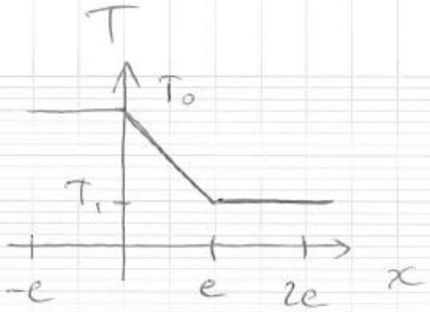
$T(e) = T_1 \Rightarrow ae + T_0 = T_1$

$a = \frac{T_1 - T_0}{e}$

d'où :

$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e} x + T_0$

Q6.



Q7. $\Phi(x) = S \cdot j_{th}$

$$= -S \cdot \lambda_v \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$= -S \cdot \lambda_v \cdot \frac{T_1 - T_0}{e}$$

$$\Phi = \lambda_v S \cdot \frac{T_0 - T_1}{e} = \frac{\lambda_v S}{e} \Delta T$$

$$\frac{\Delta T}{\Phi} = \left(\frac{e}{\lambda_v S}\right) \longrightarrow R_{th}$$

Q8. Simple vitrage :

$$R_{th} = \frac{4.10^{-3}}{1 \times 6,0} = 0,67.10^{-3}\ K/W$$

Q9. $R_{th} \Leftrightarrow R_{elec}$

Q10. $R_{tot} = 2R_{th\,v} + R_{th\,a}$

$$= 2\frac{e}{\lambda_v S} + 3\frac{e}{\lambda_{air} S} = \frac{e}{S}\left(\frac{2}{\lambda_v} + \frac{3}{\lambda_{air}}\right)$$

Q11. $R_{tot} = \frac{4.10^{-3}}{6} \times \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{0,033}\right) = 0,67.10^{-3} \times \left(\frac{3}{0,033} + 2\right)$

$$= 6,1.10^{-2}\ K/W$$

$6,1.10^{-2} \gg 0,67.10^{-3}$

Efficacité thermique !

Exercice 6 : Onde thermique (Extrait concours)

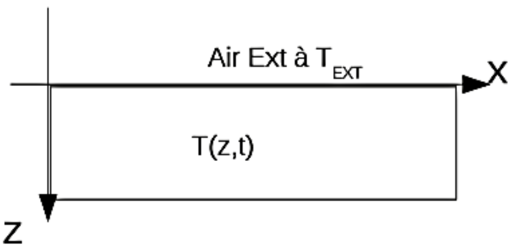
$\ln(5)=1,6$
$\sqrt{(1/0,3)}=1,8$
$\ln(0,03)= -3,5$

1. Études Préliminaires sur les ondes thermiques

Quelques données pour le sol:

$\lambda= 0,5$ $W.m^{-1}.K^{-1}$ conductivité thermique du sol
$\rho=1500$ $kg.m^{-3}$ masse volumique du sol
$c=1000$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$ capacité thermique massique du sol

fig 1



1.1. En faisant un bilan sur une tranche, démontrer l'équation de diffusion thermique dans le sol (z>0) vérifiée par la température T(z,t) pour un flux thermique vertical: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}=\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (fig1)

1.2. La température du sol est excitée par des variations périodiques de la température de l'air extérieur. On modélise la température au niveau de la surface par $T(0,t)=To+a.\cos(\omega t+\varphi)$. « a » représente l'amplitude de la variation de température à la surface du sol. On pourrait prendre les pulsation $\omega_A= 2\pi$ rad/an ~ $2\ 10^{-7}$ rad/s et $\omega_J= 2\pi$ rad/jour ~ $7\ 10^{-5}$ rad/s.
A quels phénomènes correspondent-t-elles ?

1.3. La variation de température se transmet de proche en proche. On prend une solution de la forme $T(z,t)=T_0+\alpha\cdot e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega\cdot t+\varphi-\frac{z}{\delta}\right)$. Montrer que $\delta=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}$

1.4. Que représente physiquement δ ?

1.5. Connaissez vous un autre phénomène physique où une quantité analogue à δ intervient ?

1.6. Calculer δ pour ω_J et ω_A. Commenter.

1.7. Donner en fonction de δ la profondeur pour que l'amplitude de la variation soit divisée par un facteur 5. Faire l'application numérique pour une pulsation de $\omega_A=2,0\ 10^{-7}$ rad.s^{-1}.

1.1 Voir démo équation de la chaleur du cours.

1.2. ω_A correspond à la période annuelle (oscillation température liée aux saisons).
ω_j correspond à la période quotidienne (oscillation température liée à l'alternance jour/nuit).

1.3. $T(z,t) = T_0 + \alpha e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{z}{\delta}\right)$

$$\underline{\theta}(z,t) = \alpha e^{-\frac{z}{\delta}} \exp\left(j\left(\omega t + \varphi - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$
$$= \alpha \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t + \varphi - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$
$$= \alpha \exp\left(-\frac{z}{\delta}(1+j)\right) \exp\left(j(\omega t + \varphi)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}(z,t) = j\omega\, \underline{\theta}(z,t)$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial z^2}(z,t) = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \underline{\theta}(z,t)$$

d'où :
$$\rho c\, j\omega \underline{\theta} = \lambda \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \underline{\theta}$$
$$\Rightarrow \rho c\, j\omega \underline{\theta} - \lambda \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \underline{\theta} = 0$$

$\underline{\theta} = 0$ ou
$$\rho c\, j\omega - \lambda \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 = 0$$
$$\rho c\, \cancel{j}\omega - \lambda \frac{\cancel{1} + 2j - \cancel{1}}{\delta^2} = 0$$
$$\rho c \omega - \frac{2\lambda}{\delta^2} = 0 \qquad \rho c \omega = \frac{2\lambda}{\delta^2}$$

d'où : $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega}}$ ✓

1.4. δ = distance caractéristique d'atténuation d'onde thermique. ✓

1.5. Ressemblance $\Rightarrow$ amortissement mécanique ✓

1.6. $\delta_j = \sqrt{\dfrac{2 \times 0{,}5}{1500 \times 1000 \times 7.10^{-5}}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{15 \times 7}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{105}} \simeq 10^{-1}$ m. ✓

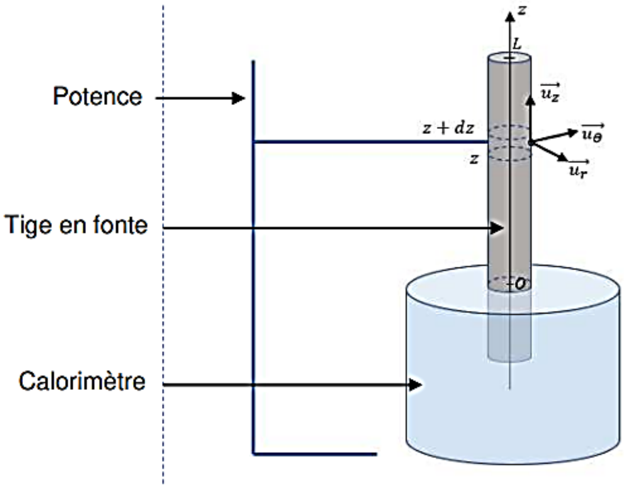
$\delta_A = \sqrt{\dfrac{2 \times 0{,}5}{1500 \times 1000 \times 2.10^{-7}}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{0{,}3}} \simeq 1{,}8$ m. ✓

1.7. Profondeur $= 5 \times \delta$
$= 9$ m pour ω_A

Exercice 7 : Détermination de la conductivité thermique d'un métal (ATS 2020)

On considère une tige en fonte, cylindrique, de rayon a dont une extrémité est plongée dans un bain d'eau glacée thermostatée dans un calorimètre à la température $T_0 = 0\ °C$. Le reste de la tige, de longueur L, est au contact de l'air extérieur supposé à une température $T_{ext} > T_0$ constante et uniforme. La pression atmosphérique sera également considérée comme constante et uniforme.



Pour cette partie théorique, on travaillera avec les hypothèses suivantes :

- On suppose le régime stationnaire atteint. On a $L = 1{,}0\ \text{m}, a = 0{,}50\ \text{cm}$ donc $L \gg a$. On pourra considérer que le champ des températures T dans la tige ne dépend que de z : on a donc $T(z)$. On a également $T(0) \approx T_0$.
- On note c la capacité thermique massique de la tige assimilée à une phase condensée indilatable et incompressible, on note ρ sa masse volumique et λ sa conductivité thermique. On prendra $c = 400\ \text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $\rho = 5000\ \text{kg.m}^{-3}$.

14) Enoncer la loi de Fourier, préciser l'unité SI de la densité de flux thermique.
15) En déduire l'expression du vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ décrivant la conduction thermique unidirectionnelle au sein de la tige étudiée.

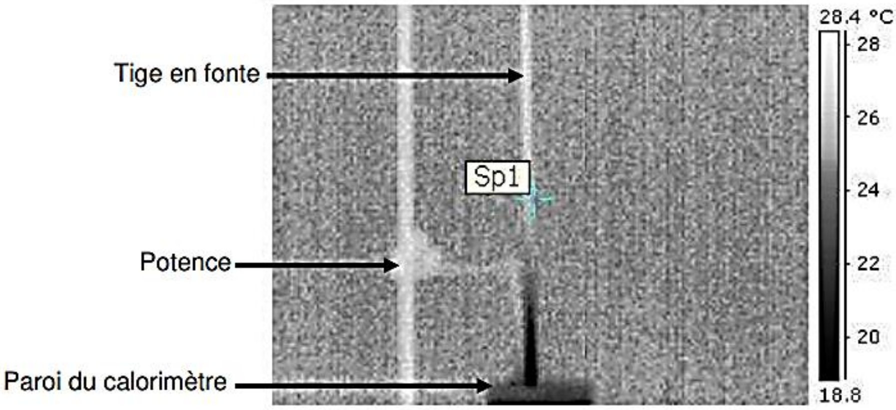
On considère un élément de volume mésoscopique de la tige compris entre z et $z + dz$ et de volume $dV = \pi a^2 dz$.

16) Effectuer un bilan enthalpique de cet élément de volume dV en supposant que la tige n'est le siège que du seul mode de transfert d'énergie par conduction thermique et montrer que $\frac{d^2T}{dz^2} = 0$.
17) Exprimer la fonction $T(z)$ puis la représenter en fonction de z, en faisant apparaître les grandeurs $T(0)$ et $T(L) > T(0)$ sur votre schéma.

Expérimentalement, nous devons compléter la description des transferts thermiques reçus par la tige en prenant en compte également le transfert conducto-convectif. On note h le coefficient de transfert conducto-convectif et on rappelle la loi de Newton définissant le vecteur densité de flux thermique associé $\overrightarrow{j_{cc}} = h(T(z) - T_{ext})\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur radial associé au repérage cylindrique dessiné ci-dessus.

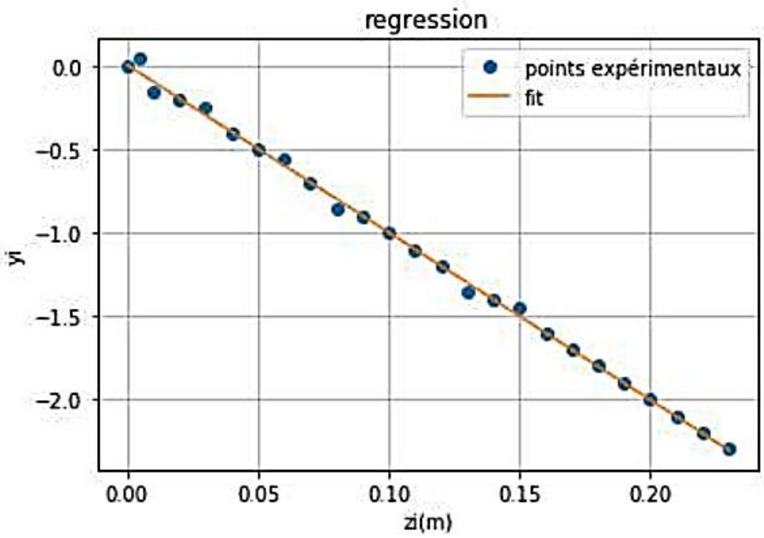
18) Effectuer un nouveau bilan enthalpique et démontrer que $\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_{ext}}{\delta^2}$ où $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ représente une distance caractéristique de variation de la température T le long de la tige.

On obtient la photographie ci-dessous à l'aide d'une caméra thermique :



19) Justifier que $T(L) = T_{ext}$ et que $\delta < L$.

Dans ces conditions, on montre alors que $T(z)$ a pour expression : $T(z) \approx T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}}$. A l'aide d'un thermocouple mis en contact avec la tige métallique, il est possible d'obtenir différentes valeurs expérimentales T_i de la température en différents points de la tige de cotes verticales z_i. On peut alors construire un graphique dans lequel on place en ordonnée les quantités $y_i = ln\left(\frac{T_i - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}}\right)$ et en abscisse les valeurs de z_i associées (en mètre).



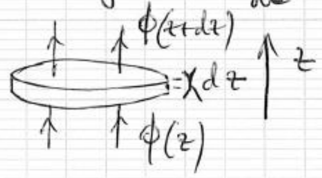
20) Estimer, en utilisant le graphe précédent, la valeur expérimentale de δ.

14) $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T$

j_{th} = densité de flux thermique en $W.m^{-2}$

15) D'où ici : $\vec{j}_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dz} \vec{u}_z$ ici.

16)



$$d^2H = c\,dm\,dT$$
$$= c\rho\, dV\,\big(T(t+dt) - T(t)\big)$$
$$= c\rho\pi a^2 dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = c\rho\pi a^2 \frac{dT}{dt} dz\, dt$$

et

$$d^2H = \big(\phi(z) - \phi(z+dz)\big)dt$$
$$= \left(-\pi a^2 \lambda \frac{dT(z)}{dz} + \pi a^2 \lambda \frac{dT}{dz}(z+dz)\right)dt$$
$$= \left(+\pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\right)dt$$
$$= +\pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\, dt$$

d'où : $c\rho\cancel{\pi}\cancel{a^2} \dfrac{dT}{dt} \cancel{dz}\cancel{dt} = +\cancel{\pi}\cancel{a^2}\lambda \dfrac{d^2T}{dz^2} \cancel{dz}\cancel{dt}$

$$c\rho \frac{dT}{dt} = +\lambda \frac{d^2T}{dz^2}$$

$$\frac{c\rho}{\lambda} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dz^2}$$

Régime stationnaire $\Rightarrow \dfrac{dT}{dt} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d^2T}{dz^2} = 0$

17) Par intégration :

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

$$T(z) = az + b$$

Conditions aux limites

$T(0) = T_0 \Rightarrow b = T_0$

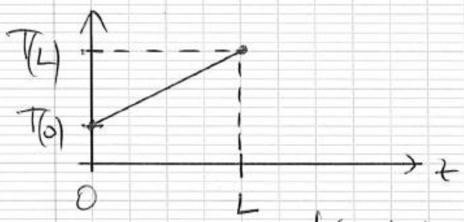
$T(L) = T_{ext}$?

$aL + T_0 = T(L)$

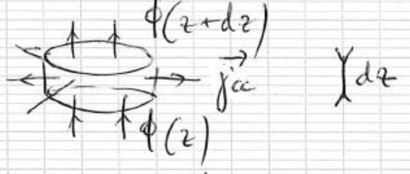
$$a = \frac{T(L) - T_0}{L}$$

d'où :

$$T(z) = \frac{T(L) - T_0}{L} z + T_0$$



18)



et

$d^2H = c\rho\pi a^2 \frac{dT}{dt} dz\, dt$ (m̂ raisonnement)

$d^2H = (\phi(z) - \phi(z+dz))dt - \vec{j}_{cc} \cdot \vec{dS}.dt$

$d^2H = (\phi(z) - \phi(z+dz))dt - h(T(z) - T_{ext})dz\, 2\pi a\, dt$

$d^2H = \pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\, dt - h(T(z) - T_{ext}) 2\pi a\, dz$

d'où :

$c\rho\pi a^2 \frac{dT}{dt} \cancel{dz\,dt} = \cancel{\pi} a^{\cancel{2}} \lambda \frac{d^2T}{dz^2} \cancel{dz\,dt} - 2\cancel{\pi}\cancel{a}\, h(T - T_{ext}) \cancel{dz\,dt}$

$\frac{dT}{dt} = 0$ (Régime permanent)

$$a\lambda \frac{d^2T}{dz^2} - 2h\left(T - T_{ext}\right) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{2h}{a\lambda} T = -\frac{2h}{a\lambda} T_{ext}$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_{ext}}{\delta^2} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$$

19) Partie supérieure de la tige à la température ext (m^ temp. que la potence).

$\Rightarrow T(L) = T_{ext}$.

Gradient sur la tige de longueur $L \Rightarrow \delta < L$

20) $T(z) - T_{ext} = \left(T_0 - T_{ext}\right) e^{-\frac{z}{\delta}}$

$$\frac{T(z) - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}} = e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\ln\left(\frac{T(z) - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}}\right) = -\frac{z}{\delta} = \left(-\frac{1}{\delta}\right) z.$$

Coeff. directeur $-\frac{1}{\delta}$

d'où $\delta = -\frac{z_b - z_a}{y_b - y_a}$

$$\delta = -\frac{0{,}20 - 0}{-2 - 0} = 0{,}10 \text{ m}$$

Exercice 8 : Gel d'un lac (E. Thibierge)

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température en surface est $T_s = -10\,°C$ alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_f. On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

1 - Exprimer la densité de courant thermique j_Q dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.

2 - On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t + dt$. Exprimer de en fonction de j_Q, de l'enthalpie de fusion de la glace ℓ et de sa masse volumique μ. En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.

3 - Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace.

- Conductivité thermique : $\lambda = 2{,}1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- Masse volumique : $\mu = 917\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$;
- Enthalpie de fusion : $\ell = 333\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

$\boxed{1}$ En régime stationnaire, le plus simple est d'utiliser la résistance thermique. En notant S la surface de glace, la couche d'épaisseur e a une résistance thermique

$$R = \frac{e}{\lambda S}.$$

Le flux Φ au travers de la couche de glace vaut donc

$$\Phi = \frac{T_f - T_s}{R} = \frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e}.$$

Or par définition $\Phi = j_Q S$ d'où on déduit

$$\boxed{j_Q = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{e}.}$$

Compte tenu du sens dans lequel j'ai choisi d'orienter la différence de température, cette densité de courant thermique est orientée vers le haut, de l'eau du lac vers l'air.

> *Une autre méthode possible consiste à commencer par déterminer le profil de température $T(z)$ dans la glace à partir de l'équation de diffusion en régime stationnaire $\Delta T = \frac{d^2T}{dz^2} = 0$ et des conditions aux limites, puis d'utiliser la loi de Fourier.*

$\boxed{2}$ Supposons le régime quasi-stationnaire, et procédons à un bilan enthalpique pour la couche infinitésimale d'eau de surface S qui gèle entre t et $t + dt$, de masse $\mu\, S\, de$. Elle ne reçoit pas de transfert thermique de la part de l'eau du lac, car elle est à la même température, et cède le transfert thermique $j_Q\, S\, dt$ à la glace. Ainsi,

$$dH \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 - j_Q\, S\, dt \underbrace{=}_{\text{gel}} -\mu\, S\, de\, \ell$$

car l'enthalpie de solidification est l'opposée de l'enthalpie de fusion. Ainsi,

$$\frac{\lambda (T_f - T_s)}{e} S\, dt = \mu\, S\, \ell\, de$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{\mu\, \ell\, e}.}$$

$\boxed{3}$ Procédons par séparation des variables,

$$e\, de = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{\mu\, \ell}\, dt$$

soit en intégrant

$$\int_{e(0)}^{e(t)} e\, de = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{\mu\, \ell} \int_0^t dt$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left[e(t)^2 - 0\right] = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{\mu\, \ell} t$$

et ainsi

$$\boxed{e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda (T_f - T_s)}{\mu\, \ell} t}.}$$

Numériquement, l'épaisseur vaut 11 cm au bout d'une journée, 29 cm au bout d'une semaine et 60 cm au bout d'un mois. C'est donc dans les premiers jours de gel que la couche de glace se forme le plus rapidement : comme on le constate sur l'expression de R, la couche de glace joue le rôle d'un isolant d'autant plus performant qu'il est épais.

> *Pour intégrer l'équation différentielle, on peut également reconnaître*
>
> $$e \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(e^2\right),$$
>
> *et utiliser la condition initiale $e(0) = 0$.*

Exercice 9 : Problème ouvert (E. Thibierge)

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35 °C.

1 - Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17 °C.

2 - Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :

▷ capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3{,}5\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$;
▷ résistance thermique de la peau : $R_{\text{peau}} = 3\cdot 10^{-2}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$;
▷ conductivité thermique du néoprène : $\lambda_{\text{néo}} = 0{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
▷ puissance produite par le métabolisme : $P_{\text{corps}} = 100\,\text{W}$;
▷ puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $P_{\text{conv}} = \alpha(T_{\text{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

On est a priori dans un régime transitoire, mais vues les données on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

$\boxed{1}$ La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\text{conv}} = 1/\alpha S = 0{,}05\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ en prenant $S \sim 2\,\text{m}^2$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv}} + R_{\text{peau}} = 8\cdot 10^{-2}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne

$$\mathrm{d}H = mc_{\text{corps}}\,\mathrm{d}T = -\Phi_{\text{tot}}\mathrm{d}t + P_{\text{corps}}\mathrm{d}t = \frac{T_{\text{mer}} - T}{R_{\text{tot}}}\mathrm{d}t + P_{\text{corps}}\mathrm{d}t$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de temépráture entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant $T_{\text{mer}} - T(t) \simeq T_{\text{mer}} - T_0 = 20\,°\text{C}$. Alors,

$$mc_{\text{corps}}\Delta T = \left(\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}\right)\Delta t$$

soit

$$\Delta t = \frac{mc_{\text{corps}}}{\dfrac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}}\Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70\,\text{kg}$,

$$\boxed{\Delta t \simeq 3{,}2\cdot 10^3\,\text{s} = 53\,\text{minutes}\,,}$$

ce qui semble raisonnable.

$\boxed{2}$ À la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{\text{combi}} = \frac{e}{\lambda_{\text{néo}} S}$$

Le premier principe mis sous forme d'une équation différentielle s'écrit

$$mc_{\text{corps}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}$$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$$0 + \frac{T_\infty}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \qquad \text{soit} \qquad T_\infty = T_{\text{mer}} + R_{\text{tot}}P_{\text{corps}}\,.$$

On veut $T_\infty > T_{\text{hypo}} = 35\,°\text{C}$, et il ne reste qu'à résoudre pour trouver e. À toi de bosser :)