ATS 2021 Problème 2 /32

1 1) $\vec{f_1} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$
$= -k(\ell_0 + X - \ell_0)\vec{u_x}$
1 $= -kX\vec{u_x}$
1 $\vec{f_2} = -k(\ell' - \ell_0)(-\vec{u_x})$
1 $= -k(\ell_0 - X - \ell_0)(-\vec{u_x}) = -kX\vec{u_x}$

(4)

1 2) $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = m a_c \vec{u_x}$

1 BAME : $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \underbrace{\vec{P} = m\vec{g}, \vec{N}}_{\text{se compensent.}}, \vec{f_3}$

$\vec{f_1} + \vec{f_2} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f_3} = m\vec{a}$

Suivant x :

1 $-2kX\vec{u_x} - \alpha(\underbrace{\dot{x}_M - \dot{x}_C}_{\dot{X}})\vec{u_x} = ma\,\vec{u_x}$

$-2kX\vec{u_x} - \alpha\dot{X}\vec{u_x} = ma\,\vec{u_x} = m\ddot{x}_M\vec{u_x}$

Or :

1 $X = x_M - x_C \Rightarrow x_M = X + x_C$
$\Rightarrow \ddot{x}_M = \ddot{X} + \ddot{x}_C$
$= \ddot{X} + a_C$

On obtient :

(6)

$-2kX\vec{u_x} - \alpha\dot{X}\vec{u_x} = m\ddot{X}\vec{u_x} + ma_C\vec{u_x}$
$-2kX - \alpha\dot{X} = m\ddot{X} + ma_C$

$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X = -a_C$

$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_C$

1 $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \omega_0\frac{m}{\alpha} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2km} \end{cases}$
1

(1)

(1)

④ 1 1 3) $\omega_0 \rightarrow rad.s^{-1}$ – Pulsation propre
1 1 $Q \rightarrow$ sans dimension – Facteur de qualité

1 4) $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_c$ | $\underline{\dot{X}} = j\omega \underline{X}$

1 $\underline{\ddot{X}} = -\omega^2 \underline{X}$

$$-\omega^2 \underline{X} + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = -a_m$$

En divisant par ω_0^2 :

$$-u^2\underline{X} + j\frac{u}{Q}\underline{X} + \underline{X} = -\frac{a_m}{\omega_0^2}$$

④ 1 $$\underline{X}\left(1 + j\frac{u}{Q} - u^2\right) = -\frac{a_m}{\omega_0^2}$$

En passant au module :

$$X_m\sqrt{(1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2} = \frac{a_m}{\omega_0^2}$$

1 $$X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2\sqrt{(1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

5) Résonance en élongation :
$\Rightarrow X_m$ passe par un maximum

1 $\Rightarrow (1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2$ passe par un minimum

1 $$\frac{d}{du}\left((1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2\right) = 0$$

④ $$-4u(1-u^2) + \frac{2u}{Q^2} = 0$$

1 $$2u\left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2u^2\right) = 0$$

$u = 0$ non pertinent

ou

$$\frac{1}{Q^2} - 2 + 2u^2 = 0$$

1 $\mu^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow \mu = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Avec $\mu = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

$$f_R = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

(2) 6) $Q = 5 \Rightarrow \frac{1}{2Q^2} = \frac{1}{50}$

1 1 $\Rightarrow \underline{f_R \simeq f_0 = 5\ \text{kHz}}$

1 7) $f \ll f_R \Rightarrow \mu^2 \ll 1$

(2) 1 $\Rightarrow X_m \simeq \frac{a_m}{\omega_0^2}$

8) $a_c = g \simeq 10\ \text{m.s}^{-2}$

1 $\Rightarrow X_m \simeq \frac{a_m}{\omega_0^2} = \frac{a_c}{\omega_0^2} = \frac{a_c}{4\pi^2 f_0^2}$

(2)

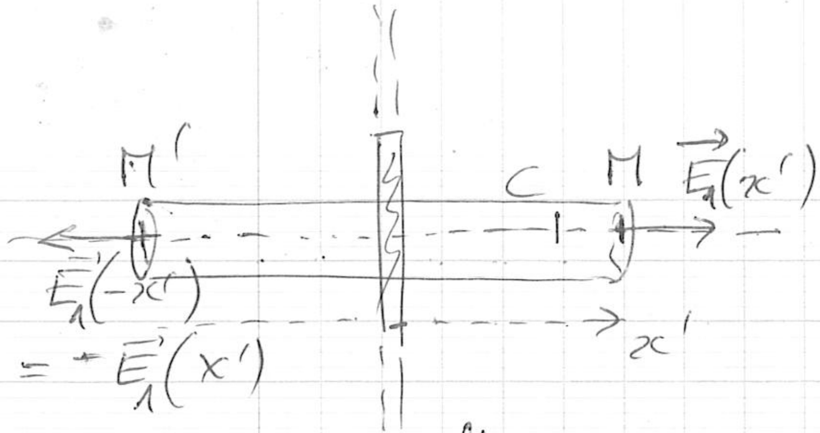
1 $X_m \simeq \frac{10}{4\pi^2 (5.10^3)^2} \simeq \frac{\cancel{10}}{4 \times \cancel{10} \times 25 \times 10^6}$

$\simeq \frac{1}{100.10^6} = \underline{10\ \text{nm}}$

9) $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

E en V.m^{-1}
dS en m^2
Q_{int} en C
ε_0 en F.m^{-1}

10) $(M, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ plan de symétrie
$(M, \vec{u_x}, \vec{u_z})$ "
$\Rightarrow \vec{E_1}(M)$ suivant $\vec{u_x}$
Invariances suivant y et z $\Rightarrow \vec{E_1}(M) = E_1(x)\vec{u_x}$



Surface de gauss : Cylindre, section S, hauteur $2x'$

$$\oiint \vec{E_1} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$
$$= 2E_1 . S$$

d'où :

$$2E_1 \cancel{S} = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \vec{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

11) Par analogie :

$$\vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$$ à gauche de l'électrode 2.

D'où :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

12) $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x} = -\vec{grad}\, V = -\frac{dV}{d\cancel{x}}\vec{u_x}$$

d'où :

$$V(X) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}X + cte \quad (1)$$

Pour $X = e$

$$V(e) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e + cte = -U_0 \quad (2)$$

$V(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$(1) \Rightarrow V(X) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}X \quad (3)$

$(2) \Rightarrow -U_0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e \quad (4)$

33) $\vec{f} = (P - P_0) S \vec{u_z} = p(z) S \vec{u_z}$

34) $P(z)(V + Sz)^\gamma = P_0 V^\gamma$

$(P_0 + p(z))(V + Sz)^\gamma = P_0 V^\gamma$

$$P_0 + p(z) = P_0 \frac{V^\gamma}{(V + Sz)^\gamma} = P_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{Sz}{V}\right)^\gamma}$$

$$P_0 + p(z) = P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V}\right)$$

d'où : $p(z) = -P_0 \frac{\gamma S z}{V}$

35) BAME non negligees : $\vec{f} = p(z) S \vec{u_z}$

PFD : $\vec{f} = m\vec{a} = m\ddot{z}\vec{u_z} = \rho S L \ddot{z} \vec{u_z}$

$$-P_0 \frac{\gamma \cancel{S} z S}{V} = \rho \cancel{S} L \ddot{z}$$

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{P_0 \gamma S}{\rho V L}}_{\omega_0^2} z = 0$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_0 \gamma S}{\rho L V}}$$

36) Une seule frequence dans le spectre

$\Rightarrow$ oscillateur harmonique

$f_0 \simeq 110$ Hz

37) Resolution $\simeq$ 2 Hz

38) $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{\rho L (V - V_{eau})}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{\rho L (V - D_v t)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{\rho L V}}\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{D_v t}{V}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{\rho L V}}\left(1 - \frac{D_v t}{V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{\rho L V}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{D_v}{V} t\right)$$

R. linéaire confirmée avec
$f_0 = at + b$ et a (coeff. directeur) positif.

39) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
$\vec{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

40) $\vec{rot}(\vec{rot}\, \vec{E}) = \vec{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta} \vec{E}$

$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\, \vec{B}) = -\vec{\Delta} \vec{E}$

$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta} \vec{E}$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

41) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\vec{u_z}$

Direction de polarisation : u_z.

Vérification à l'aide d'un polarisateur

42) $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\vec{u_z}$

$\vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\omega^2}{v^2} E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)\vec{u_z}$

d'où :

$$-\frac{\omega^2}{v^2} E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right) = 0$$

$$v = c \ !$$

43) $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{rot}\,\vec{E}$

$= \vec{rot}\, E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_z}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ +\frac{E_0\omega}{c}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$= +E_0 \frac{\omega}{c}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_y}$

d'où :

$\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_y} + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{cte}$

44) $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ $(W.m^{-2})$

45) $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_z} \wedge -\left(\frac{E_0}{c}\right)\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_y}$

$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_x}$

$\langle\vec{R}\rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)\vec{u_x}\right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u_x}$

46) $\|\langle \vec{R} \rangle\| \times 4\pi d^2 = P$

$\|\langle \vec{R} \rangle\| = \frac{P}{4\pi d^2}$

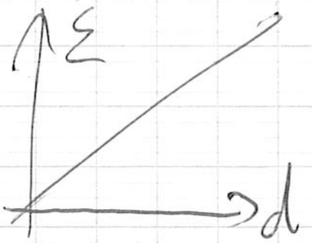
47) $\frac{E_0^2}{\cancel{2}\mu_0 c} = \frac{P}{\frac{\cancel{4}\pi d^2}{2}} \Rightarrow E_0^2 = \frac{\mu_0 c P}{2\pi d^2}$

$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi}} \frac{\sqrt{P}}{d}$

Or : $\sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \times 3.10^8}{2\pi}}$

$= \sqrt{\frac{12\pi}{2\pi} . 10} = \sqrt{60}$

48) $\Sigma = f\left(\frac{1}{d^2}\right)$



Proportionnalité d'après les colonnes Σ et d-2.

49) ~~Ondes stationnaires~~ Interférences constr. et destr.
Présence de ventres et de noeuds.

50) Ventres et noeuds repérables par p(x,t) ou I (dB)

$p(x,t) = P_0 \cos\left(\frac{\pi a f x}{c D}\right)$

2 noeuds separés par π et $x = 0,5$ m

$\frac{\cancel{\pi} a f x}{c D} = \cancel{\pi}$

$D = \frac{a x f}{c} = \frac{1 \times 0,5 \times 6800}{340}$

$= 10$ m