ATS 2020

1) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

2) $E_p = -mgz + cte$
$= + mgl(1 - \cos\theta) + cte$
Pour $\theta = 0$, $E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$
d'où :
$\underline{E_p = + mgl(1 - \cos\theta) = -mgl(\cos\theta - 1)}$

3) $\frac{dE_m}{dt} = P_{non\ cons}$ Puissance des forces non conservatives.
$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = P_{non\ cons}$

4) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(\cos\theta - 1)\right) = 0$ (Pas de frottement)
$m l^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta} mgl \sin\theta = 0$
$m l \dot{\theta}(l\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$

m ou l ou $\dot{\theta} = 0$ non pertinent

ou

$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

$\underline{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

5) $\sin\theta \simeq \theta$

l'éq. diff. devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

d'où la solution :

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

d'où :

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

CI :

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

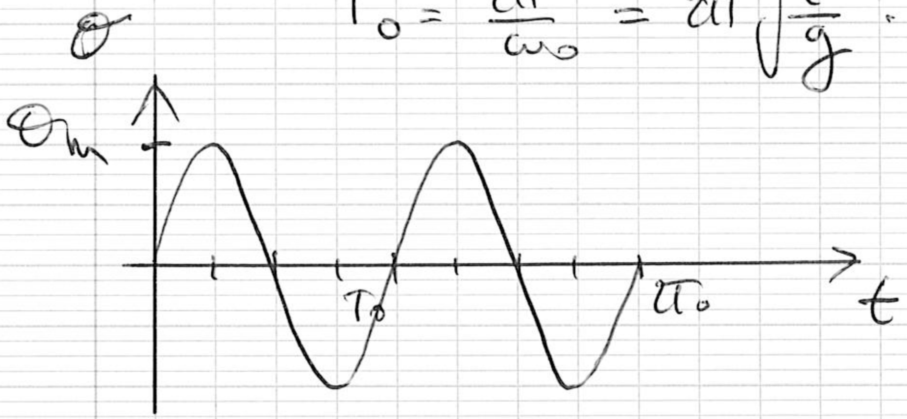
$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \omega_0 \theta_m = \dot{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \theta_m = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$$

d'où :

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



6) E_m = constante car mouvement conservatif

d'où :

$$E_m = E_m \text{ lorsque } E_p = 0$$

$$= E_m(\theta = 0)$$

$$E_m = E_c(\theta = 0)$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times (\sqrt{10})^2 = 1{,}0 \text{ J}$$

7) $E_{p\,max} = \cancel{2{,}0\,J}$ ~~(graphiquement)~~
$E_{p\,max} = \cancel{mgl(1-\cos\theta)_{max}}$
$\cancel{= 2gl}$
~~l inconnu ...~~

d'où $E_{p\,max} = E_m(\theta = 0) = 1{,}0\,J$
graphiquement :
$$\theta_{0\,max} = +\frac{\pi}{2}.$$

8) $\begin{array}{l} 300\,s \\ 1\,s \end{array}$ $\quad$ $600\,000$ éch
$$\frac{600\,000}{300} = 2000 \text{ éch/s}.$$
$$\underline{2\,kHz}$$

9) Oscilloscope + analyseur de spectres.

10) Isochronisme observable sur intervalles n°2 et n°4.
car H3 non observable.

11) Effets non linéaires observables sur intervalles n°1 et 3
car H_3 observable.

12) $f_0 = 1{,}00\,kHz$

13) Raie 1_b
→ Fréquence $3f_0' = \dfrac{3}{T_0'} \simeq \dfrac{3}{T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)} = \dfrac{3f_0}{1+\frac{\theta_0^2}{16}}$

θ_0 inconnu
D'où $3f_0' < 3f_0 = 3\,kHz$
graphiquement : Fréquence $= 2{,}25\,kHz$
$= 3 \times f_0' = 3 \times 0{,}75\,kHz$

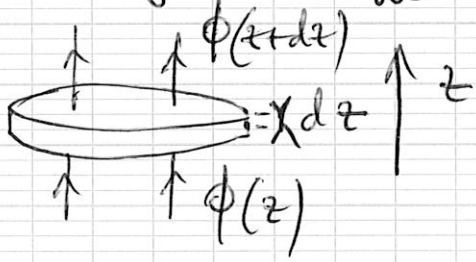
~~Unidimensionnel~~
~~???~~
ok

14) $\vec{j_{th}} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

j_{th} = densité de flux thermique en $W.m^{-2}$

15) D'où ici : $\vec{j_{th}} = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{u_z}$ ici.

16)



$$d^2H = c\, dm\, dT$$
$$= c\rho\, dV \,(T(t+dt) - T(t))$$
$$= c\rho \pi a^2 dz \frac{\partial T}{\partial t} dt \;.\; = c\rho \pi a^2 \frac{dT}{dt} dz\, dt$$

et

$$d^2H = (\phi(z) - \phi(z+dz))\, dt$$
$$= \left(-\pi a^2 \lambda \frac{dT(z)}{dz} + \pi a^2 \lambda \frac{dT}{dz}(z+dz)\right) dt$$
$$= \left(+\pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\right) dt$$
$$= +\pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\, dt$$

d'où : $c\rho \cancel{\pi} \cancel{a^2} \frac{dT}{dt} \cancel{dz} \cancel{dt} = + \cancel{\pi} \cancel{a^2} \lambda \frac{d^2T}{dz^2} \cancel{dz} \cancel{dt}$

$$c\rho \frac{dT}{dt} = + \lambda \frac{d^2T}{dz^2}$$

$$\frac{c\rho}{\lambda} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dz^2}$$

Régime stationnaire $\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2T}{dz^2} = 0$

---

17) Par intégration :

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

$$T(z) = az + b$$

Conditions aux limites

$$T(0) = T_0 \Rightarrow b = T_0$$

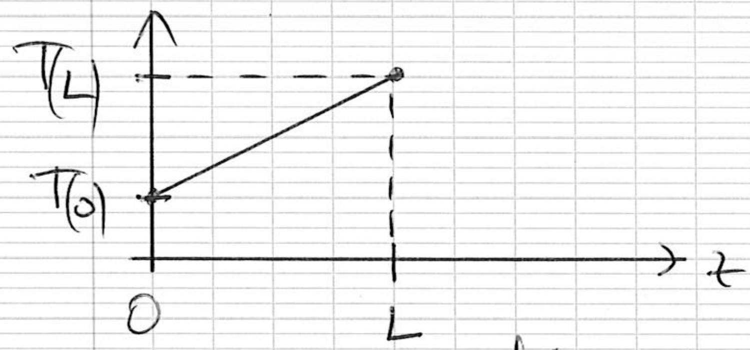
$$T(L) = T_{ext} \;?$$

$aL + T_0 = T(L)$

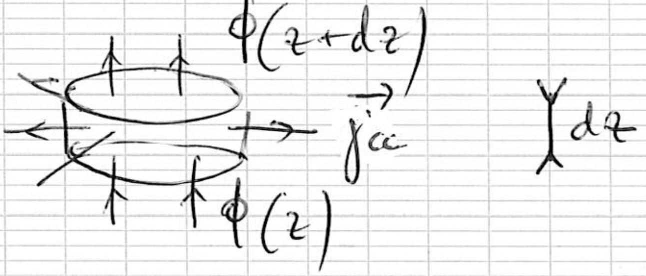
$$a = \frac{T(L) - T_0}{L}$$

d'où :

$$T(z) = \frac{T(L) - T_0}{L} z + T_0$$



18)



(d) $d^2H = c\rho \pi a^2 \frac{dT}{dt} dz\, dt$ (m̂ raisonnement)

$$d^2H = (\phi(z) - \phi(z+dz))dt - \vec{j_{cc}} \cdot \vec{dS}\, dt$$

$$d^2H = (\phi(z) - \phi(z+dz))dt - h(T(z) - T_{ext})dz\, 2\pi a\, dt$$

$$d^2H = \pi a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} dz\, dt - h(T(z) - T_{ext}) 2\pi a\, dz$$

d'où :

$$c\rho \pi a^2 \frac{dT}{dt} dz\, \cancel{dt} = \cancel{\pi} a^2 \lambda \frac{d^2T}{dz^2} \cancel{dz\, dt} - 2\cancel{\pi} a h (T - T_{ext}) \cancel{dz\, dt}$$

$\frac{dT}{dt} = 0$ (Régime permanent)

$$a\lambda \frac{d^2T}{dz^2} - 2h\left(T - T_{ext}\right) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{2h}{a\lambda} T = -\frac{2h}{a\lambda} T_{ext}$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_{ext}}{\delta^2} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$$

---

19) Partie supérieure de la tige à la température ext (mê temp. que la potence).

$\Rightarrow T(L) = T_{ext}$

Gradient sur la tige de longueur $L \Rightarrow \delta < L$

20) $$T(z) - T_{ext} = \left(T_0 - T_{ext}\right) e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\frac{T(z) - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}} = e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\ln\left(\frac{T(z) - T_{ext}}{T_0 - T_{ext}}\right) = -\frac{z}{\delta} = \left(-\frac{1}{\delta}\right) z$$

Coeff. directeur $-\frac{1}{\delta}$

d'où $\delta = -\dfrac{z_b - z_a}{y_b - y_a}$

$$\delta = -\frac{0{,}20 - 0}{-2 - 0} = 0{,}10 \text{ m}$$

25) Ecoulement stationnaire incompressible
$\Rightarrow$ Conservation du débit volumique.

$$v_a S = v_b s$$

26) $P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$.
Entre A et B :

$$\cancel{P_0} + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \cancel{P_0} + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$\rho g(z_A - z_B) = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$\underline{\rho g h = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)}$$

27) $s \ll S$ d'où : $v_A \simeq 0$
On obtient :

$$\cancel{\rho} g h = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_B^2$$

$$\underline{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Commentaire : v_B proportionnelle à $\sqrt{h}$?

28) $v_B = \sqrt{2 g z_A(t)} = v_A \frac{S}{s} = -\frac{dz_A}{dt}\frac{S}{s}$

$$\sqrt{2 g z_A} = -\frac{S}{s}\frac{dz_A}{dt}$$

$$\sqrt{2g}\, z_A^{+\frac{1}{2}} = -\frac{S}{s}\frac{dz_A}{dt}$$

$$dt = -\frac{S}{s}\frac{1}{\sqrt{2g}}\, dz_A \cdot z_A^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{t_0} dt = \int_h^0 -\frac{S}{s}\frac{2}{\sqrt{2g}}\, z_A^{\frac{1}{2}}$$

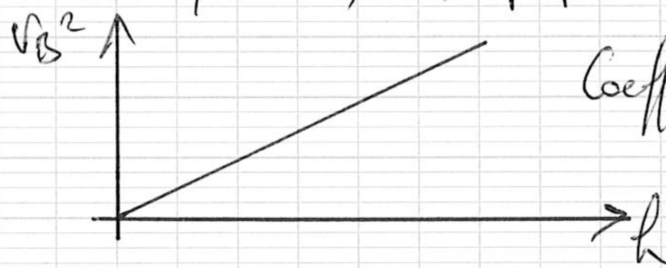
$$t_0 = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}.$$

d'où : $$\frac{S}{s} = t_0\sqrt{\frac{g}{2h}} = 10\sqrt{\frac{10}{2\times 0{,}20}} = 50.$$

29) $v_B = \sqrt{2gh}$

$v_B^2 = 2gh$

Théoriquement, v_B proportionnel à h.



Coeff directeur $2g$.

30) $$D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho D_v = \rho S v_B$$

avec $S = \pi r^2$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \pi r^2 v_B$$

d'où : $$v_B = \frac{\Delta m}{\rho \pi r^2 \Delta t}$$

31) $$\cancel{P_B} + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \cancel{P_A} + \rho g z_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_A^2} - \frac{K v_B^2}{2}\times \rho$$

$J.m^{-3}$ $\qquad$ $J.kg^{-1}$ $\qquad$ $kg.m^{-3}$

d'où : $v_B^2 = 2gh - K v_B^2$

$v_B^2(1+K) = 2gh$ $\qquad$ $$v_B^2 = \frac{2gh}{1+K}$$

32) v_B^2 en fonction de h
→ Coeff directeur $\frac{2g}{1+K}$

Graphiquement :
$a =$ Coeff. directeur $= \frac{1{,}50 - 0{,}50}{0{,}150 - 0{,}050} = \frac{1{,}00}{0{,}100} = 10$

d'où : $\frac{2g}{1+K} = a$

$2g = a + aK$

$2g - a = aK$

$\frac{2g - a}{a} = K$

A.N. $K = \frac{2 \times 10 - 10}{10} = 1{,}0$.

34) Premier principe en Σ ouvert.
$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q$.
On prend : $\Delta e_p = 0$
$\Delta e_c = \frac{1}{2} v_s^2 - \frac{1}{2} v_e^2 \simeq \frac{1}{2} v_s^2$

En multipliant par D_m

$D_m \left(h_s - h_e + \frac{1}{2} v_s^2 \right) = P_i + P_{th}$

$D_m \left(c_p (T_s - T_e) + \frac{v_s^2}{2} \right) = P_{th} + P_i$

33) $h_s - h_e = c_p (T_s - T_e)$

35) $\eta = \frac{D_m \left(c_p (T_s - T_e) + \frac{v_s^2}{2} \right)}{P_{elec}} \left(= \frac{P_{th} + P_i}{P_{elec}} \right)$

$$P_{elec} = 500 \text{ W} \quad (\text{mesuré})$$

$$T_e = 20°C$$

$$T_S = 30°C$$

d'où : $c_p(T_S - T_e) = 1000(30-20) = 10^4$

v_S mesuré grâce à la sonde Pitot

S = sortie du sèche cheveux, $v_S \neq 0$

→ Première entrée Pitot

S' → Deuxième entrée Pitot

$$P_S + \cancel{\rho g} z_S + \frac{1}{2}\rho v_S^2 = P_S' + \cancel{\rho g} z_S' + \frac{1}{2}\rho v_S'^2$$

On suppose $v_S' = 0$

$$\frac{1}{2}\rho_{air} v_S^2 = P_S' - P_S$$

$$= \rho_{eau} g h$$

$$v_S = \sqrt{2\frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} g h} = \sqrt{2\frac{1000}{20} \times 10 \times 2.10^{-2}}$$

$$\simeq 20 \text{ m.s}^{-1}$$

d'où :

$$D_m = \rho D_v = \rho S v_S$$

section carrée ?

$$D_m = 1 \times 4.10^{-2} \times 4.10^{-2} \times 20$$

$$= 300.10^{-4} = 3.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$$

D'où : $$\eta = \frac{D_m\left(c_p(T_S - T_e) + \frac{v_S^2}{2}\right)}{P_{th} + P_i}$$

$$\eta = \frac{3.10^{-2} \times \left(1000 \times (30-20) + \frac{20^2}{2}\right)}{500}$$

négligeable

$$\eta = \frac{3.10^{-2} \times (10000 + 200)}{500}$$

$$\eta \simeq \frac{300}{500} \simeq 0{,}6$$

36) $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L$

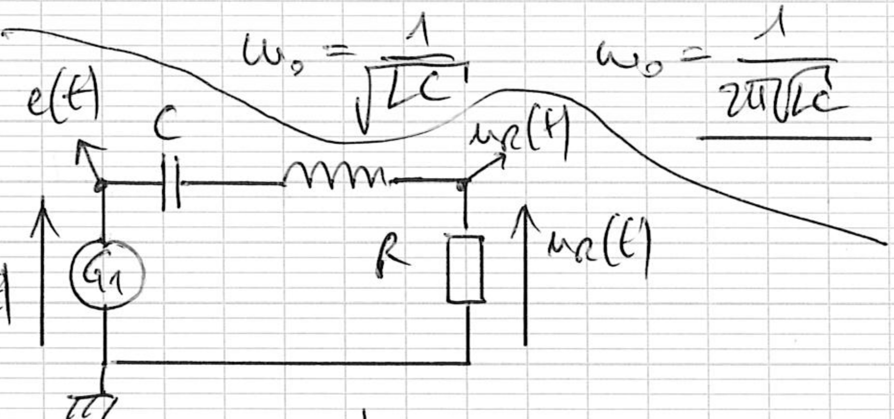
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega = \underline{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

37) $e(t)$ et $u_R(t)$ sont en phase si $\underline{Z}$ réelle

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \underline{\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

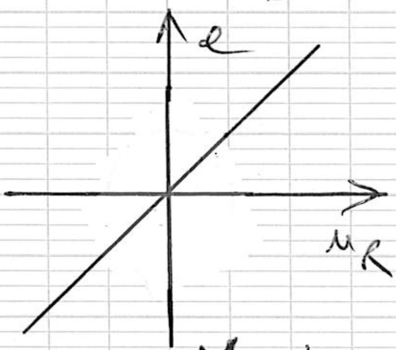
38)



39) $|\Delta\varphi| = 360 \dfrac{|\Delta t|}{T}$ avec Δt décalage temporel

$$|\Delta\varphi| = 360 \frac{1{,}5}{9} = 60°$$

40)

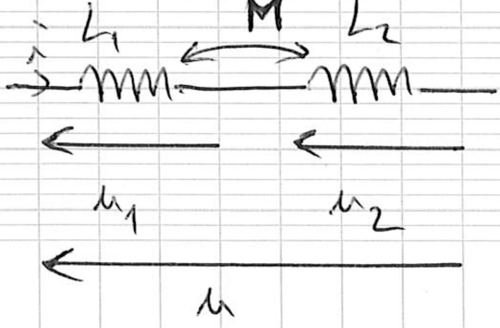


$f = f_0$

$\Rightarrow u_R = e$.

Droite à 45°.

41)



$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

$$u = u_1 + u_2$$
$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt}$$
$$u = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq.}} \frac{di}{dt}$$

42) Cela dépend de l'orientation relative des 2 circuits bobinés.

43) On aura une résonance pour
f_{01} associé à $L_1 + L_2 + 2M$
f_{02} associé à $L_1 + L_2 - 2M$

$$f_{o2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2+2M)C}}$$

$$(f_{o2} < f_{o1} \text{ ok})$$

Montrer ou calculer ?

$$f_{o1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2-2M)C}}$$

$$f_{o2}^2 = \frac{1}{4\pi^2 C(L_1+L_2+2M)} \text{ et } f_{o1}^2 = \frac{1}{4\pi^2 C(L_1+L_2-2M)}$$

d'où :
$$2M = \frac{1}{4\pi^2 C f_{o2}^2} - L_1 - L_2 \quad (1)$$
$$\text{et } -2M = \frac{1}{4\pi^2 C f_{o1}^2} - L_1 - L_2 \, (2)$$

$$(1)-(2) : 4M = \frac{1}{4\pi^2 C f_{o2}^2} - \frac{1}{4\pi^2 C f_{o1}^2}$$

$$\underline{M = \frac{1}{16\pi^2 C}\left(\frac{1}{f_{o2}^2} - \frac{1}{f_{o1}^2}\right)}$$

44) $\left[\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = m \cdot m^{-2}$
$= m^{-1}$

$\left[\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] = m \cdot s^{-2}$

d'où : $\left[\dfrac{1}{v^2}\right] = m^{-2} \cdot s^2$

$[v^2] = m^2 \cdot s^{-2}$

$[v] = m \cdot s^{-1}$

Vitesse de propagation de l'onde

$y(x,t) = Y_0(x) \sin \omega t$

45) Onde stationnaire

46) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$= \dfrac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} \sin \omega t + \dfrac{1}{v^2} \omega^2 Y_0(x) \sin \omega t = 0$

$\sin \omega t \left(\dfrac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + \dfrac{\omega^2}{v^2} Y_0(x) \right) = 0$

$\sin \omega t = 0$ Non pertinent.

ou

$\dfrac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + \underbrace{\dfrac{\omega^2}{v^2}}_{k^2} Y_0(x) = 0$

$k = \dfrac{\omega}{v}$

47) $y(x,t) = Y_0(x) \sin \omega t$

Conditions aux limites :

$\begin{cases} Y_0(0) = 0 \\ Y_0(L) = 0 \end{cases}$

En écrivant : $Y_0(x) = Y_m \sin(kx + \varphi)$

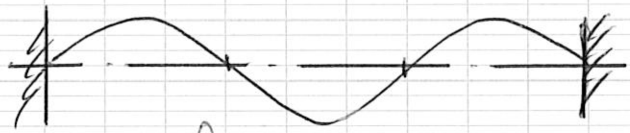
$$\begin{cases} Y_m \sin\varphi = 0 \\ Y_m \sin(kL+\varphi) = 0 \end{cases}$$

On choisit $\varphi = 0$

$$\sin(k_p L) = 0$$
$$k_p L = p\pi$$
$$k_p = \frac{p\pi}{L}$$

d'où $\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L}{p}$

48)



49) Mode fondamental :

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{vT}{2}$$ avec $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

$$L = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

$$L^2 = \frac{T^2}{4}\frac{T_0}{\mu}$$

d'où :

$$T_0 = \frac{4\mu L^2}{T^2} = 4\mu L^2 f^2$$

$$T_0 = 4\times 50.10^{-3}\times 0{,}7^2\times 100^2$$
$$\simeq 4\times 50.10^{-3}\times 0{,}5\times 100^2$$
$$= 100\times 10^{-3}\times 10^4 = 1000 \text{ N}$$

$\Leftrightarrow$ 100 kg

Renforts nécessaires !