EM1 ELECTROSTATIQUE DU VIDE

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électrostatique du vide	
Description et effets électriques d'une accumulation de charges statiques	Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique out linéique de charges. Définir le champ électrostatique à l'aide de la force électrostatique ressentie par une charge ponctuelle d'essai placée dans le champ électrostatique d'une autre distribution. Citer quelques ordres de grandeurs de champs électriques. Énoncer le principe de Curie. Repérer les symétries et invariances d'une distribution. Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ associées à une charge ponctuelle, un cylindrique infini, un plan infini uniformément chargés et une sphère chargée uniformément.
Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss et équation de Maxwell-Faraday de la statique	Énoncer l'expression du champ créé par une charge ponctuelle. Énoncer le théorème de Gauss et le relier à l'équation de Maxwell-Gauss. Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère). Énoncer l'équation de Maxwell-Faraday de la statique et justifier l'existence du potentiel électrostatique. Justifier les propriétés des lignes de champ électrostatique.
Conducteur en équilibre électrostatique	Énoncer les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique. Énoncer le théorème de Coulomb et les relations de passage du champ électrostatique.
Le condensateur	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords. Établir l'expression de la capacité linéique d'un condensateur cylindrique dans le vide en négligeant les effets de bords. Définir la notion de densité volumique d'énergie électrique à l'aide de l'exemple du condensateur plan. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de mesurer l'énergie emmagasinée par un condensateur.**

I) INTERACTION ELECTRIQUE ET CHAMP

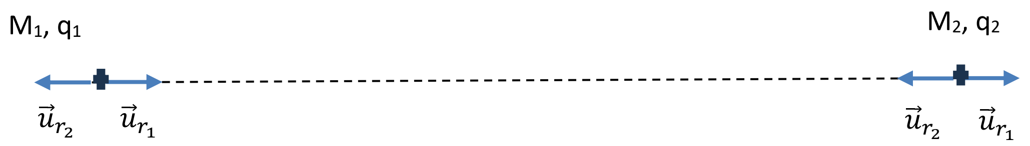
I)1) Charges électriques

Charge électrique : grandeur scalaire extensive, conservative et quantifiée (toutes les charges isolables sont multiples de la charge élémentaire).

Charge élémentaire : $e = 1.609.10^{-19}\ C\ (coulombs)$

2 charges de même signe se repoussent.

2 charges de signe contraire s'attirent.



La **force électrostatique** est définie par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F}_{1\,sur\,2} = -\vec{F}_{2\,sur\,1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_2}$$

Exemple ci-dessus : q_1 et q_2 sont de même signe

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}\ (farads\ par\ mètre)$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.10^9\ m.F^{-1}$

I)2) Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q_1 :

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_1}$$

La **force électrostatique** sur q_2 devient :

$$\vec{F}_{1\,sur\,2} = q_2.\vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_1}$$

Remarque :

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q_2 :

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{r_2}$$

La **force électrostatique** sur q_1 devient :

$$\vec{F}_{2\,sur\,1} = q_1.\vec{E}_2$$

Le **champ électrostatique** créé, en tout point M de l'espace, par une **charge ponctuelle q** située en P**,** est **radial** et ne dépend que de la distance $r = PM$:

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Ordre de grandeurs du champ électrique E :

	Ordre de grandeur		
Ondes radio	$\approx$	10^{-1}	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Grille-pain et télévision		40 et 60	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Atmosphère par beau temps	$\approx$	$\mathbf{10^2}$	$\mathbf{V.m^{-1}}$
À 30 cm d'un réfrigérateur	$\approx$	10^2	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Ligne haute tension (90 000 V) à 30 m de l'axe	$\approx$	10^2	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Ligne haute tension (460 000 V) à 100 m de l'axe	$\approx$	2.10^2	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Dans un canon à électron	$\approx$	10^3	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Atmosphère par temps orageux	$\approx$	10^4	$\mathrm{V.m^{-1}}$
Champ disruptif de l'air	$\approx$	$\mathbf{3.10^6}$	$\mathbf{V.m^{-1}}$

I)3) Champ électrostatique créé par un ensemble de charges

Principe de superposition : le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge individuellement.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{{r_i}^2}\vec{u}_{r_i}$$

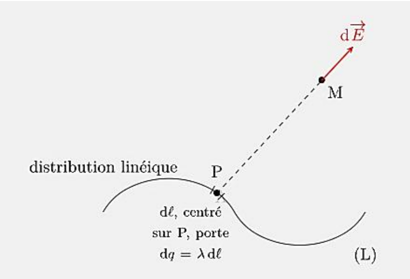
I)4) Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

On définit le champ électrostatique élémentaire au point M, crée par une charge élémentaire dq située au point P :

$$\boldsymbol{d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

Distribution linéique

On définit la **densité linéique de charge** au point P :



$\boldsymbol{\lambda(P) = \frac{dq}{dl}}$ avec :

dq charge élémentaire au point P (C)

dl longueur élémentaire au point P (m)

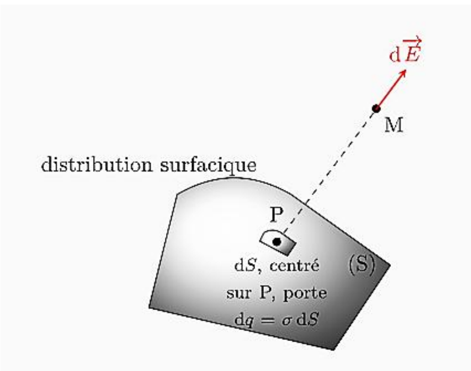
$\lambda(P)$ densité linéique de charge au point P (C.m^{-1})

Charge totale de la distribution linéique :

Champ électrostatique au point M :

Distribution surfacique

On définit la **densité surfacique de charge** au point P :



$\boldsymbol{\sigma(P) = \frac{dq}{dS}}$ avec :

dq charge élémentaire au point P (C)

dS surface élémentaire au point P (m^2)

$\sigma(P)$ densité surfacique de charge au point P (C.m^{-2})

Charge totale de la distribution surfacique :

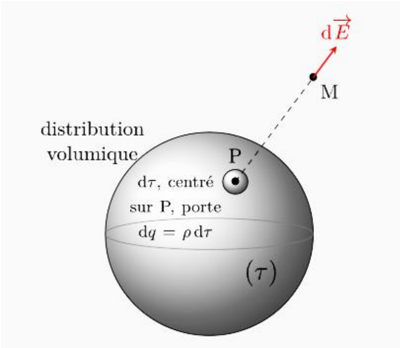
$$\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma(P).dS}$$

Champ électrostatique au point M :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(P).dS}{r^2}\vec{u}_r}$$

Distribution volumique

On définit la **densité volumique de charge** au point P :



$\boldsymbol{\rho(P) = \frac{dq}{d\tau}}$ avec :

dq charge élémentaire au point P (C)

$d\tau$ volume élémentaire au point P (m^3)

$\rho(P)$ densité volumique de charge au point P (C.m^{-3})

Charge totale de la distribution volumique :

$$\boldsymbol{Q = \iiint_{\tau} \rho(P).d\tau}$$

Champ électrostatique au point M :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\tau} \frac{\rho(P).d\tau}{r^2}\vec{u}_r}$$

I)5) Lignes de champ électrostatique

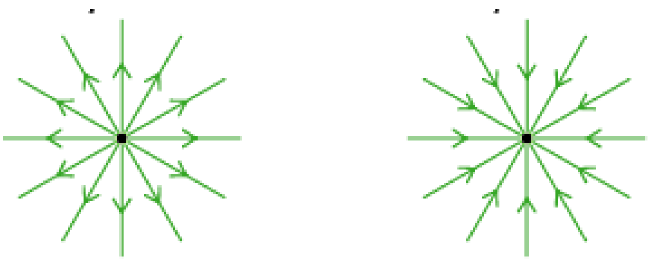
Les lignes de champ électrostatique sont tangentes en tout point au vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

Exemples de topographies de lignes de champ électrostatique :

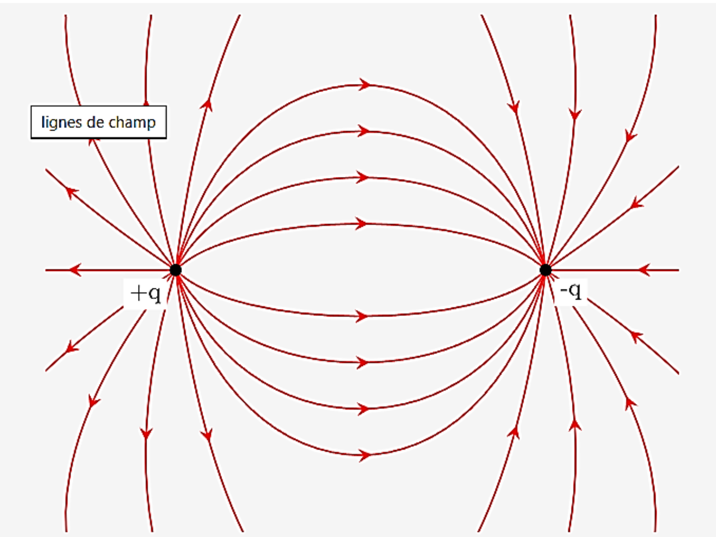
Une charge ponctuelle q :

$q > 0$

$q < 0$



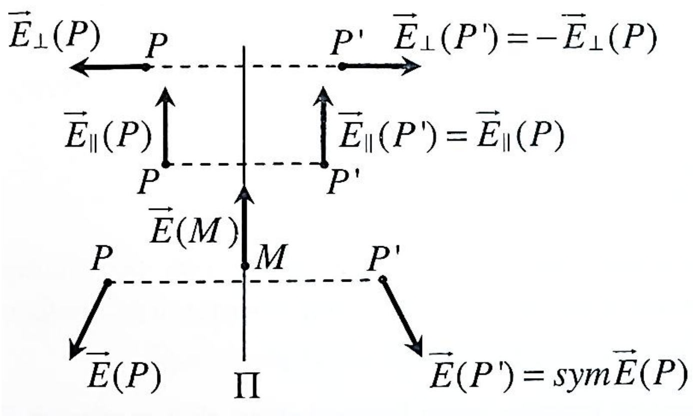
Deux charges ponctuelles de signe opposé :



I)6) Symétries de la distribution de charges et du champ

Principe de Curie : Les effets présentent au moins les symétries des causes.

Plan de symétrie

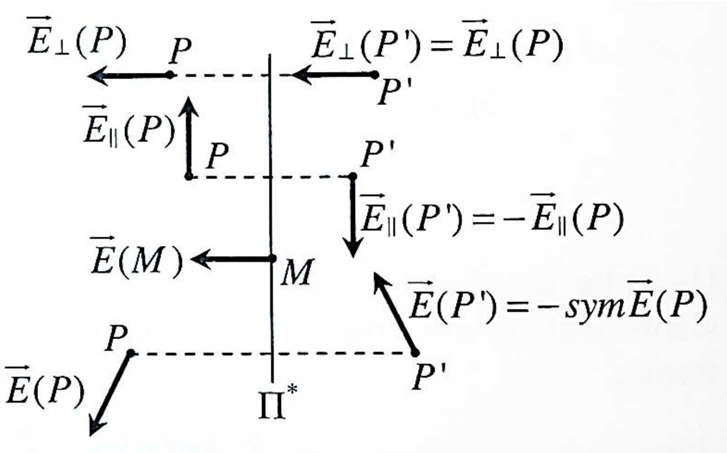


Π : Plan de symétrie de la distribution de charges

⇨

Remarque : Pour tout point M du plan de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan.

Plan d'antisymétrie

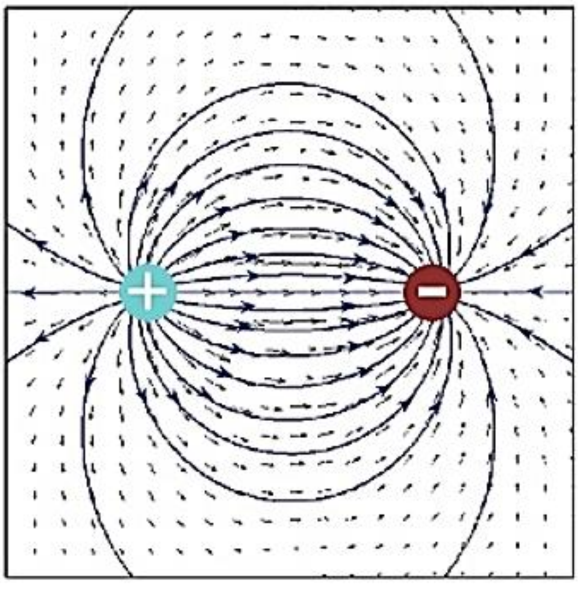


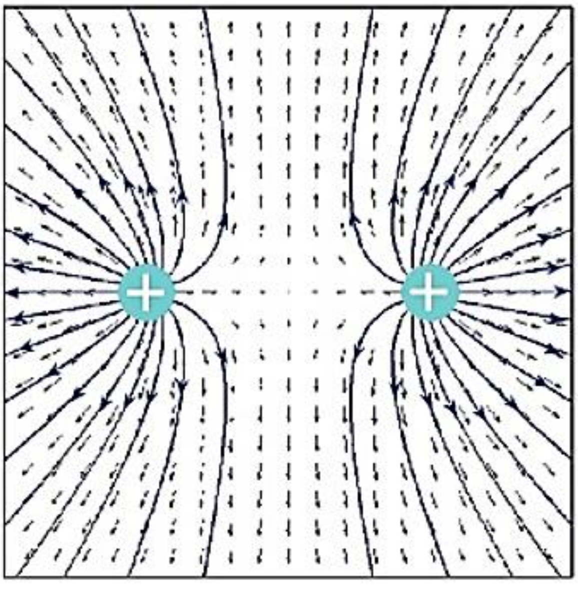
Π^* : Plan d'antisymétrie de la distribution de charges

⇨

Remarque : Pour tout point M du plan d'antisymétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

Exemples :



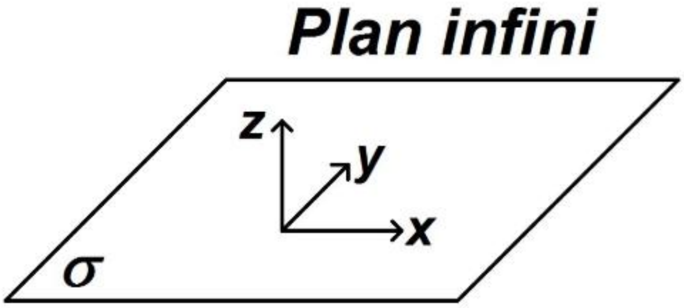


I)7) Invariances de la distribution de charges et du champ

Exemple 1 : σ distribution surfacique de charges, sur un **plan infini** selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$

Etude en **coordonnés cartésiennes**

Invariance de la distribution de charges en translation suivant x et y



De plus :

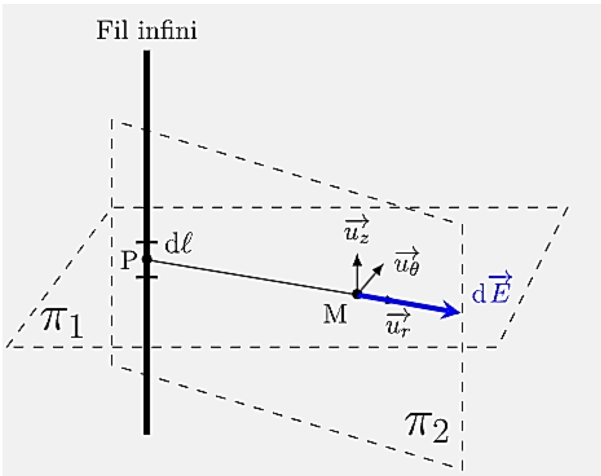
Symétrie de la distribution de charges par rapport à tout plan passant par M et perpendiculaire au plan (P)

Conclusion des symétries et invariances :

De plus : Plan (P) plan de symétrie

Exemple 2 : λ distribution linéique de charges, sur un **fil infini** selon $\vec{u}_z$.

Etude en **coordonnés cylindriques**



Invariance de la distribution de charges en translation suivant z

Invariance de la distribution de charges en rotation autour de z

De plus :

- **Symétrie** de la distribution de charges par rapport au plan Π_1
- **Symétrie** de la distribution de charges par rapport au plan Π_2

Conclusion des symétries et invariances :

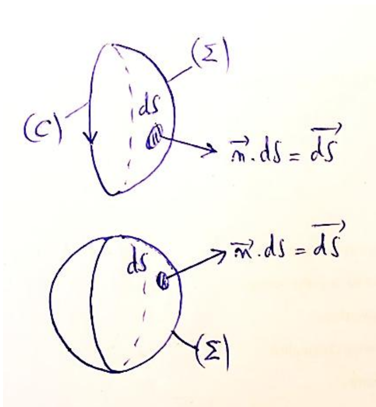
II) THEOREME DE GAUSS

II)1) Flux du champ électrostatique

Flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface (Σ) :

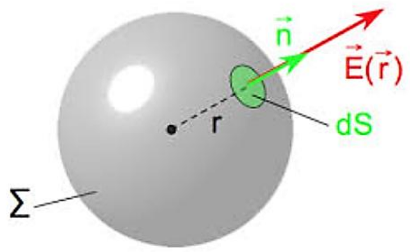
$$\boldsymbol{\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma \vec{E}.\vec{n}.dS}$$

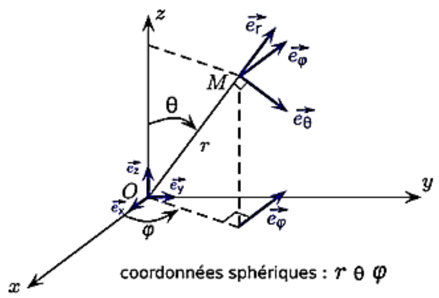
Contour (C) orienté délimitant une surface (Σ) :



Si la surface (Σ) est fermée, la normale est orientée vers l'extérieur :

Exemple : Cas d'une charge ponctuelle Q située en O





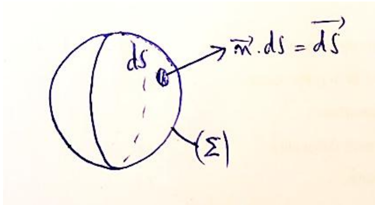
- Flux à travers une sphère
- Coordonnées sphériques :

$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

Symétries : Tout plan passant par M et le centre 0 de la sphère est plan de symétrie de la distribution de charges

Invariances en rotation suivant $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$

Calcul du flux :



Remarque : flux conservatif

II)2) Théorème de Gauss

(Σ) surface fermée orientée vers l'extérieur,

$Q_{int} = \sum q_i$ situées à l'intérieur de (Σ),

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss permet de déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace dans les cas de **géométries à haut degré de symétrie**.

II)3) Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de **Maxwell-Gauss** traduit localement le **Théorème de Gauss** :

Equation de Maxwell-Gauss :

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : densité volumique de charges (C.m^{-3})

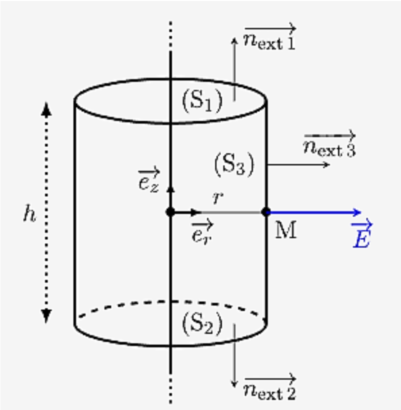
ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Si $\rho = 0$ (pas de charge électrique, localement) :

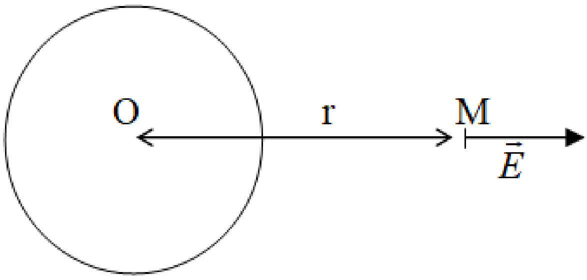
$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

II)4) Cas de géométries à haut degré de symétrie

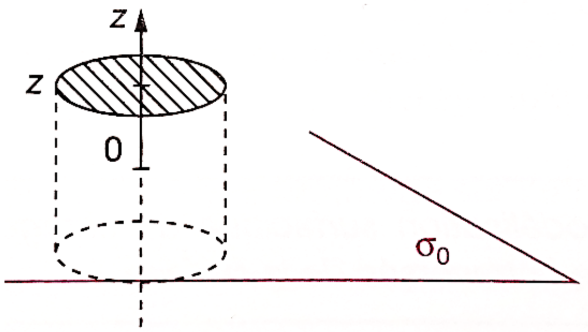
Cas du fil infini (charge linéique λ)



Cas d'une sphère chargée : rayon R, densité de charge surfacique σ, charge totale q.



Cas d'un plan infini (densité de charge surfacique σ_0)



III) POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

III)1) Energie potentielle électrostatique

Charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{\boldsymbol{E}}$

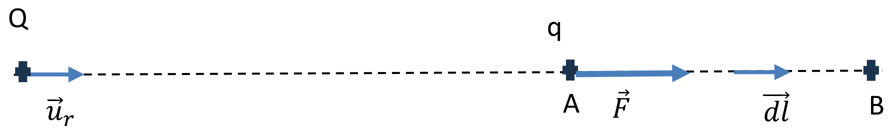
⇨ Force électrostatique : $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q}.\vec{\boldsymbol{E}}$

Cette force est **conservative** : le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi

⇨ On peut définir une **énergie potentielle électrostatique** E_P :

$$W_{A\rightarrow B}(\vec{F}) = E_P(A) - E_P(B)$$

Exemple : charge ponctuelle, déplacement radial



Energie potentielle électrostatique liée au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$:

$$\boldsymbol{E_P(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (en\ joules, J)}$$

III)2) Potentiel électrostatique

L'énergie potentielle électrostatique est proportionnelle à la charge q.

D'où :

$\frac{E_P(M)}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = V(M)$ est une propriété du champ.

Potentiel électrostatique lié au champ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (en\ volts, V)}$$

Pour une distribution de charges :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}$$

III)3) Circulation du champ

Travail de la force électrostatique :

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}) = -\int_{A}^{B} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$$

Ou, localement : $\boldsymbol{dV} = -\vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$

III)4) Gradient

Différenciation du potentiel (au premier ordre) :

Or :

Par identification :

Ou encore : $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{V})$

III)5) Equation de Maxwell-Faraday de la statique

Calculons $\overrightarrow{rot}\vec{E}$:

(règle générale)

Equation de Maxwell-Faraday de la statique :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

III)6) Equation de Poisson et de Laplace

Calculons $div\vec{E}$:

Or : $div\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Equation de Maxwell-Gauss)

D'où : $\boldsymbol{\nabla^2 V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \Delta(V) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ <u>Equation de Poisson</u>

En l'absence localement de charges ($\rho = 0$) :

$$\boldsymbol{\nabla^2 V = \Delta(V) = 0}$$ <u>Equation de Laplace</u>

<u>III)7) Surface équipotentielle</u>

$\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$

$\vec{E}$ est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

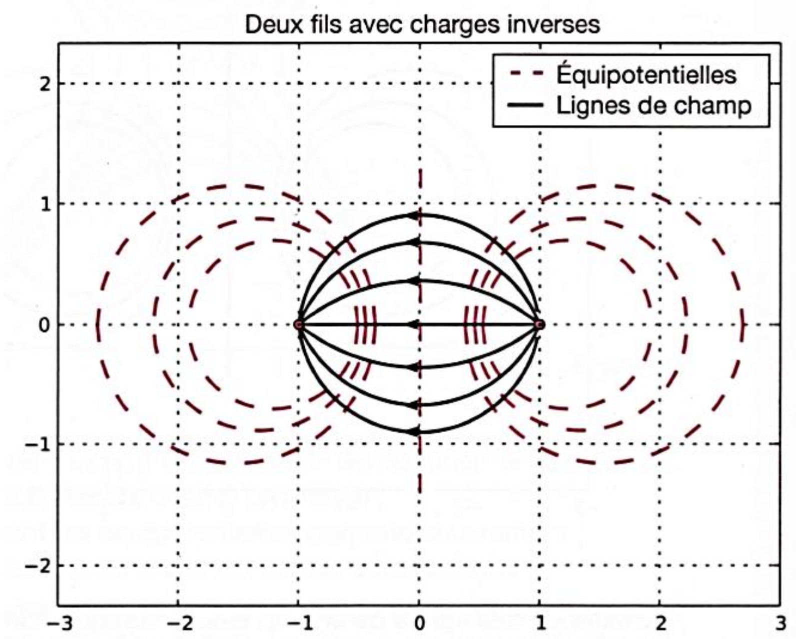
Surface équipotentielle : Surface sur laquelle le potentiel V a la même valeur.

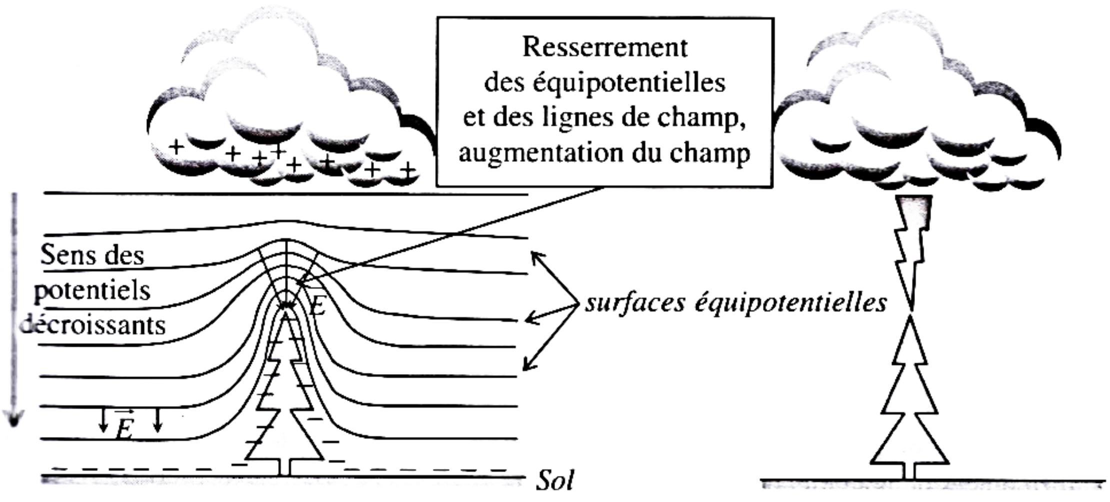
Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ électrostatique.

Le champ électrostatique est d'autant plus intense que les lignes de champ ou les surfaces équipotentielles se rapprochent.

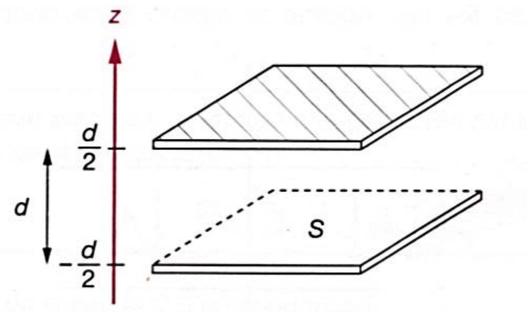
Remarque : plan d'antisymétrie de la distribution de charges = surfaces équipotentielles.

Exemples :





IV) CONDENSATEUR



IV)1) Capacité d'un condensateur

Exemple : **condensateur plan**

Un condensateur est constitué de 2 surfaces planes conductrices, appelées armatures, placées l'une en face de l'autre, et séparées par un isolant.

S = surface des armatures

d = distance entre les armatures

Hypothèse : plans infinis => on néglige les effets de bord.

Symétries :

Antisymétries :

Invariances suivant x et y =>

Conclusion :

On applique une tension *U* entre les 2 armatures

⇨ Armature supérieure au potentiel $\frac{U}{2}$, armature inférieure au potentiel $-\frac{U}{2}$

σ : densité surfacique de charges sur l'armature supérieure

$-\sigma$: densité surfacique de charges sur l'armature inférieure

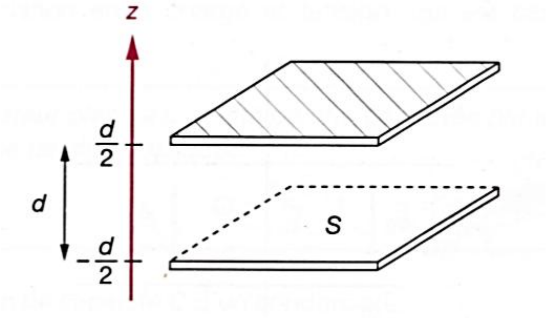
(Charges opposées, conformes au plan d'antisymétrie)

$Q = \sigma . S$: Charge armature supérieure

Principe de superposition

- Pour $z > \frac{d}{2}$:

Champ $\vec{E}_1$ créé par l'armature supérieure (voir II)4), plan infini) :



Champ $\vec{E}_2$ créé par l'armature inférieure :

⇨ Champ total :

- Pour $z < \frac{d}{2}$:

Champ $\vec{E}_1$ créé par l'armature supérieure :

Champ $\vec{E}_2$ créé par l'armature inférieure :

⇨ Champ total :

- Entre les armatures : pour $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$

Champ $\vec{E}_1$ créé par l'armature supérieure :

Champ $\vec{E}_2$ créé par l'armature inférieure :

⇨ Champ total :

Potentiel électrostatique

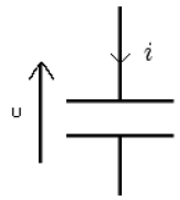
Par intégration :

<u>Tension</u>

<u>Capacité du condensateur</u>

$\boldsymbol{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$ **, capacité du condensateur plan, en farads (F)**

La charge Q portée par l'armature supérieure est proportionnelle à la tension U appliquée.



IV)2) Energie stockée dans un condensateur

Convention **récepteur** :

Charge q de l'armature positive :

$$q(t) = C.u(t)$$

Courant ou intensité de charge i :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = C\frac{du}{dt}(t)$$

Puissance **reçue** par le condensateur :

$$p(t) = u(t).i(t)$$

Energie **reçue** par le condensateur :

$$E(t) = \int_0^t u(t).i(t).dt = \int_0^t u(t).C\frac{du}{dt}(t).dt = C\int_0^t u(t).\frac{du}{dt}(t).dt = C\left[\frac{1}{2}u^2(t)\right]_0^t = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

Energie emmagasinée par un condensateur de capacité C, soumis à une tension U :

$\boldsymbol{W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$ avec charge $Q = CU$

Exemple : **condensateur plan**

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2$$

Avec : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$ $d'où$ $|E| = \|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et $|U| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$ et Volume : $Vol = S.d$

On obtient : $W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{S.d.\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Vol.\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}.Vol.\varepsilon_0.E^2$

Densité volumique de charge : $\boldsymbol{w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{W}{Vol} = \frac{1}{2}.\frac{Vol.\varepsilon_0.E^2}{Vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

$\boldsymbol{w}$ ne dépend que du champ électrostatique E, et ne dépend pas de paramètres géométriques.

V) CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

V)1) Propriétés du conducteur en équilibre électrostatique

Conducteur = milieu dans lequel les charges électriques peuvent se déplacer.

Dans un conducteur en **équilibre électrostatique**, les charges électriques ne se déplacent plus :

On a aussi :

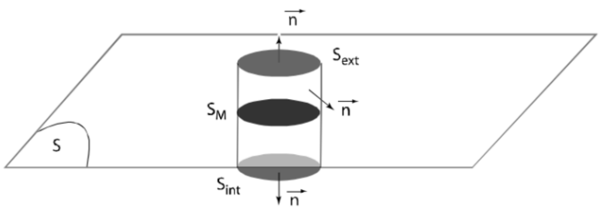
Mais aussi : $\vec{E} = \vec{0}$ => $div\vec{E} = 0$ avec $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Un conducteur en équilibre électrostatique est un volume équipotentiel. Il est électriquement neutre, mais peut porter des charges en surface (densité surfacique de charges $\boldsymbol{\sigma}$).

V)2) Théorème de Coulomb

Conducteur en équilibre électrostatique, densité surfacique de charges σ.

Champ nul à l'intérieur du conducteur, champ $\vec{E}$ à l'extérieur du conducteur.



Surface de Gauss : cylindre traversant la surface du conducteur, de section S.

Symétries et invariances :

Théorème de Gauss :

Théorème de Coulomb : Au voisinage immédiat d'un conducteur électrostatique, le champ électrostatique peut s'écrire :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}$$

σ : densité surfacique de charges (C.m^{-2})

$\vec{n}$: normale à la surface du conducteur, orientée vers l'extérieur

V)3) Cage de Faraday

Cage de Faraday = Enceinte conductrice métallique fermée, qui est étanche aux champs électriques.

Exemples d'applications :

- Protection par rapport aux champs électriques extérieurs : blindage électrique, boitier métallique ordinateur,
- Protection par rapport aux champs électriques intérieurs : Boitier four à micro-ondes.