EM2 MAGNETOSTATIQUE DU VIDE – CONDUCTION ELECTRIQUE

Programme ATS

5. Conduction électrique	
Courant dans un conducteur	Définir le vecteur densité de courant. Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire. Énoncer la loi d'Ohm locale. Expliquer l'effet Joule, définir la résistance électrique dans un conducteur et présenter le lien avec la conduction thermique en régime stationnaire. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.

6. Magnétostatique du vide	
Effets magnétiques d'un courant de charges	Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. Définir la notion de ligne de champ magnétostatique. Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique.

	Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution de courant. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Mawxell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'apprécier la validité du modèle du solénoïde infini.**

I) CHAMP MAGNETOSTATIQUE

I)1) Sources de champ magnétique

Champ magnétique $\vec{B}$: grandeur vectorielle. B exprimé en **teslas** (T).

Différentes sources de champ magnétique $\vec{B}$:

- **Aimant permanent** : ordre de grandeur de B : $0{,}1\ T$;
- Courant électrique (déplacement de charges électriques) : ordre de grandeur de B créé par un **électroaimant** $1\ T$;
- **Champ magnétique terrestre** (crée par des mouvements de convection du noyau liquide terrestre, contenant du métal liquide Fe, Ni, …) : ordre de grandeur $5.10^{-5}\ T$.

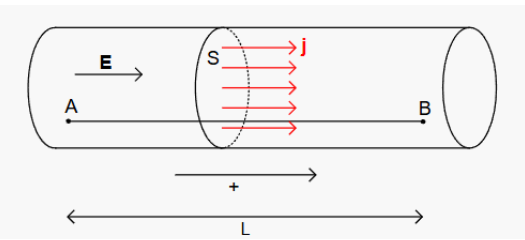
<u>Magnétostatique</u> : Etude des champs magnétiques en **régime stationnaire**.

I)2) Courant électrique et vecteur densité de courant

Dans un milieu conducteur de l'électricité, le déplacement des charges électriques peut être traduit par le **vecteur densité de courant $\vec{j}$**.

L'intensité du courant électrique I est définie comme le flux de $\vec{j}$ à travers une surface (section) S du conducteur mais aussi comme le débit de charges électriques :

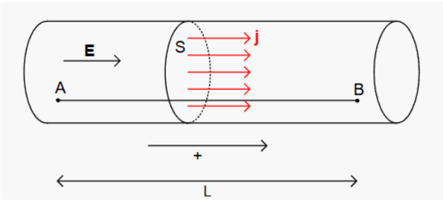
<u>Remarque</u> : si $\vec{j}$ uniforme sur S, alors



Analogies :

Grandeur thermique	Grandeur méca flu	Grandeur électrique
$\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{J_Q}.\overrightarrow{dS}$ Flux ou puissance thermique (W)	$D_M = \frac{dm}{dt} = \iint_\Sigma \overrightarrow{J_m}.\overrightarrow{dS}$ Débit massique (kg.s^{-1})	$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ Intensité électrique (A)

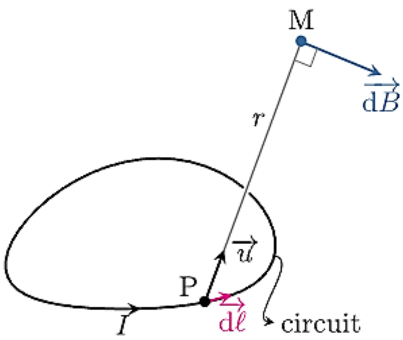
Remarque : **Distribution filiforme** de courants, si largeur conducteur << longueur conducteur :



est équivalent à :

I)3) Champ magnétostatique : loi de Biot et Savart (hors-programme)

Conducteur filiforme parcouru par un courant I, déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ le long de ce conducteur.



Champ magnétostatique élémentaire $\boldsymbol{\overrightarrow{dB}(M)}$ en tout point de l'espace :

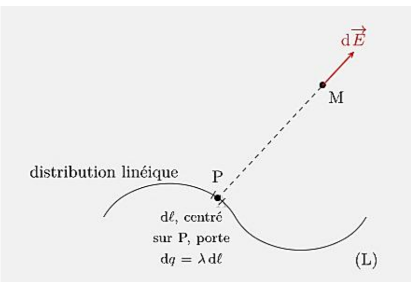
$$\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

$\boldsymbol{\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}}$ **: perméabilité magnétique du vide**

Champ magnétostatique $\boldsymbol{\vec{B}(M)}$ en tout point de l'espace :

$$\boldsymbol{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I.\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}}$$ **Loi de Biot et Savart**

Equivalent : Champ électrostatique en tout point de l'espace :



Champ électrostatique au point M :

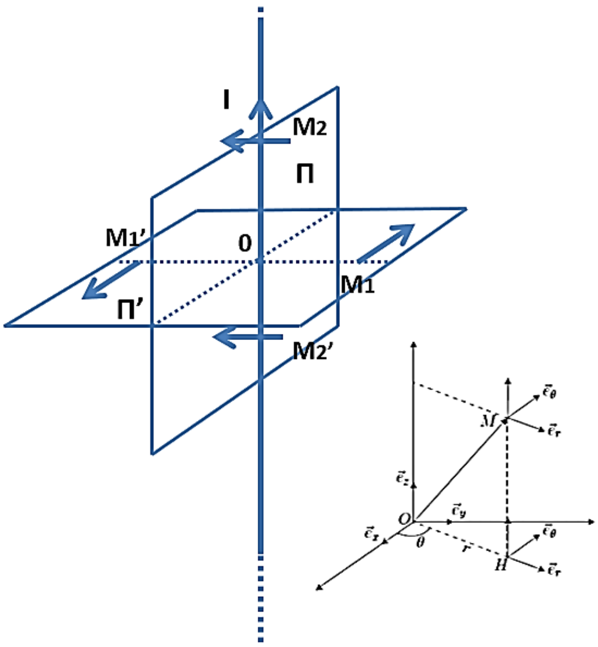
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(P).dl}{r^2}\vec{u}_r$$

I)4) Symétries de la distribution de courant et du champ

Tout **plan de symétrie Π pour les courants** est un **plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique $\vec{B}$.**

Tout **plan d'antisymétrie Π^* pour les courants** (plan qui transforme les courants en leurs opposés) est un **plan de symétrie pour le champ magnétostatique $\vec{B}$.**

Exemple : fil infini parcouru par un courant d'intensité I



M$_2$ et M$_2$' $\in \Pi$ => $\vec{B}(M_2)$ et $\vec{B}(M_2{}')\perp\Pi$
M$_2$ et M$_2$' symétriques par rapport à Π^* => $\vec{B}(M_2)$ et $\vec{B}(M_2{}')$ symétriques par rapport à Π^*

M$_1$ et M$_1$' $\in \Pi^*$ => $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_1{}') \in \Pi^*$
M$_1$ et M$_1$' symétriques par rapport à Π => $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_1{}')$ « antisymétriques » par Π

I)5) Invariances

Invariance par translation le long d'un axe

Si la distribution de courants est invariante par translation suivant un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend pas de la coordonnée le long de cete axe.

Exemple du fil infini précédent :

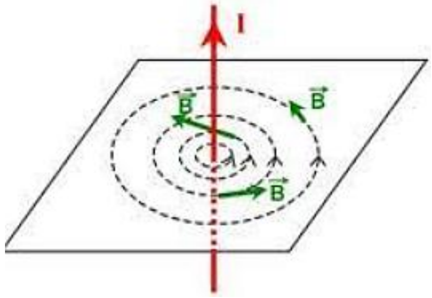
Invariance par rotation autour d’un axe (ou symétrie de révolution)

- ⇨ Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d’un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Exemple du fil infini précédent :

I)6) Lignes de champ magnétostatique

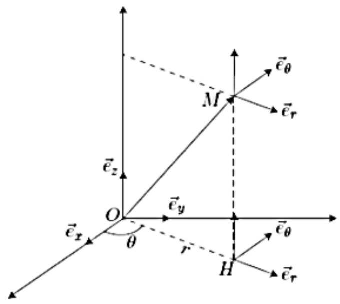
Une ligne de champ magnétostatique est une courbe tangente en chacun de ses points au champ magnétostatique.



Les lignes de champ ont tendance

Un tube de champ est un canal formé par l’ensemble des lignes de champ passant par tous les points d’un contour fermé.

Exemple : fil infini parcouru par un courant d’intensité *I*

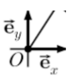


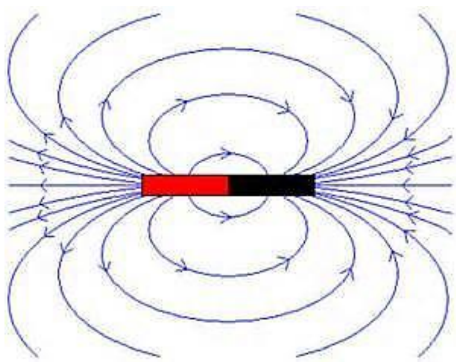
Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ $\vec{B}$) :

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ $\vec{B}$) :

Invariances :

Exemple : Aimant droit



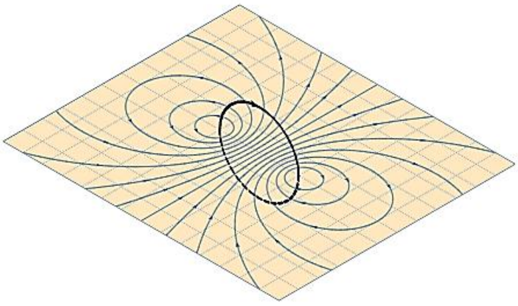


Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ $\vec{B}$) :

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ $\vec{B}$) :

Invariances :

<u>Exemple</u> : Spire circulaire

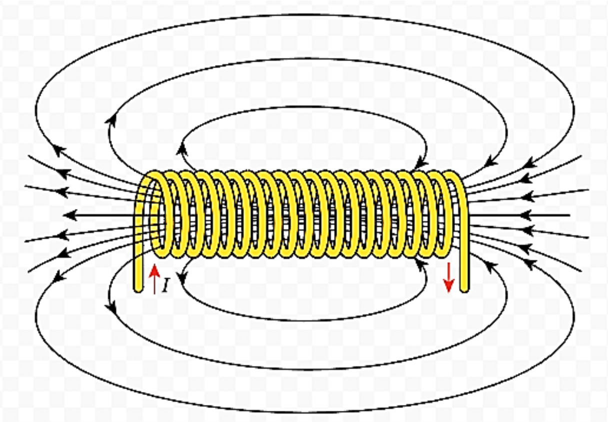


Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ $\vec{B}$) :

Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ $\vec{B}$) :

Invariances :

<u>Exemple</u> : bobine longue



Bobine longue d'axe Oz : D << L

Symétries de la distribution de courants I (antisymétries du champ $\vec{B}$) :

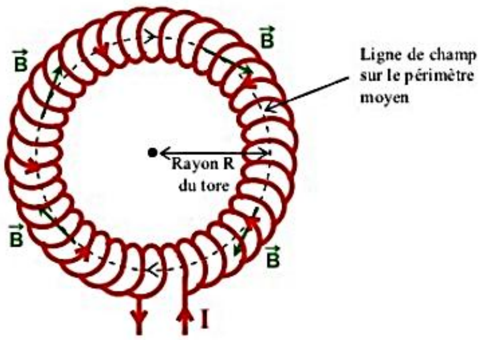
Antisymétries de la distribution de courants I (symétries du champ $\vec{B}$) :

Invariances : par rotation autour de Oz

<u>Exemple</u> : tore

$\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du tore

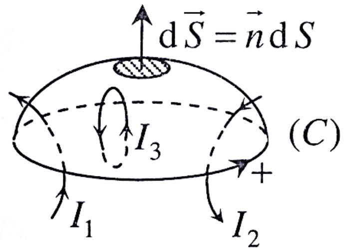
Application (en régime variable) : **Transformateur**



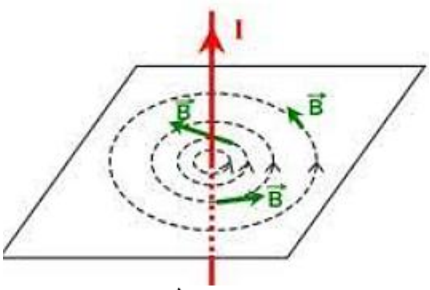
II) PROPRIETES DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

<u>II)1) Théorème d'Ampère (forme intégrale)</u>

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale au produit de μ_0 par l'intensité I_e enlacée, intensité qui traverse une surface S orientée s'appuyant sur (C).

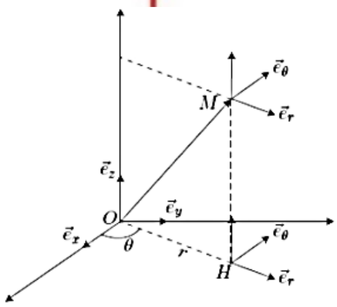


<u>Exemple</u> : fil infini parcouru par un courant d'intensité I



Symétries + antisymétries + invariances

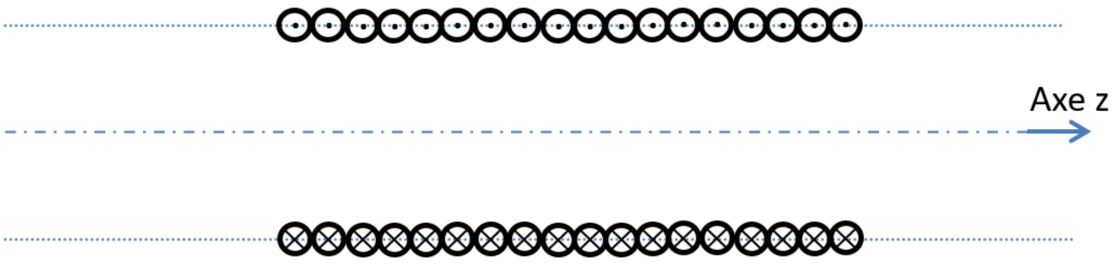
Contour d'Ampère orienté : Cercle d'axe *Oz* et de rayon r



Théorème d'Ampère :

Conclusion :

Exemple : solénoïde infini



Nombre de spires par unité de longueur : $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{L}}$

Hypothèses : L « infinie » ; enroulement hélicoïdal => les spires peuvent être considérées comme circulaires

Symétries : Tout plan passant par M et perpendiculaire à z

Antisymétries :

Invariances :

Conclusion

Hypothèse : $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du solénoïde

- Contour d'Ampère orienté ABCD à l'intérieur du solénoïde, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde

- Contour d'Ampère orienté EFGH, contenu dans le plan contenant l'axe du solénoïde

II)2) Equation de Maxwell-Ampère de la statique (forme locale)

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

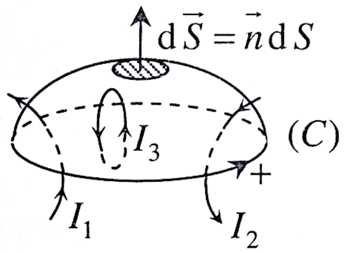
C'est la forme locale du Théorème d'Ampère.

Rappel : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

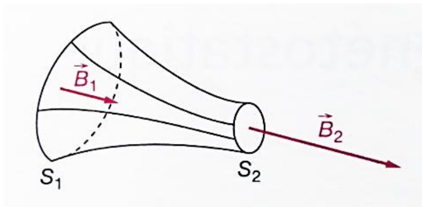
II)3) Flux du champ magnétique (forme intégrale)

Le flux du champ magnétostatique est nul à travers toute surface fermée (ou surface de Gauss) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$



Ou encore : le flux du champ magnétostatique à travers toute section d'un même tube de champ est constant : on parle de **flux conservatif**.



Rappel : Théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

II)4) Equation de Maxwell-Thomson (forme locale)

$$div\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

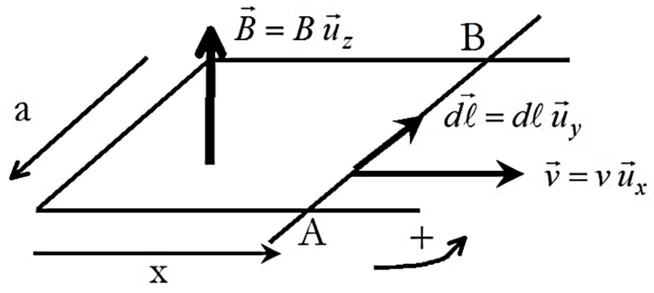
C'est la forme locale de la relation précédente.

Rappel : $div\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

III) FORCE DE LAPLACE

Une particule de charge q traversant un champ magnétostatique $\vec{B}$ subit la **force de Lorentz** suivante :

Un élément filiforme de longueur dl parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétostatique $\vec{B}$ subit la force de Laplace élémentaire suivante :



Par intégration :

Exemple sur la tige AB ci-contre (Rail de Laplace) :

IV) EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

Les 4 **équations de Maxwell** régissent complètement les comportements des 2 champs (électrique et magnétique) en **régime variable quelconque** (dépendant du temps).

IV)1) Equation de Maxwell-Gauss

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$

L'équation de Maxwell-Gauss relie le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ à sa source $\boldsymbol{\rho}$ (densité volumique de charges).

C'est la forme locale du **Théorème de Gauss** :

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

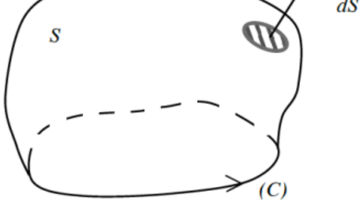
IV)2) Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday traduit le couplage entre le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

Cette relation locale traduit le phénomène d'induction connu sous sa forme intégrale : la **loi de Faraday** :

Théorème de Stokes (hors-programme) :

Pour une surface S qui s'appuie sur un contour orienté (C) fermé :



$$\oint_{(C)} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{rot}\,\vec{\boldsymbol{E}}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \iint_S -\frac{\boldsymbol{\partial \vec{B}}}{\boldsymbol{\partial t}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = -\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}\iint_S \vec{\boldsymbol{B}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = -\frac{\boldsymbol{d\varphi}}{\boldsymbol{dt}} \neq \boldsymbol{0}$$

La **circulation** de $\vec{E}$ est **non conservative** en régime quelconque.

Remarque : En régime stationnaire (électrostatique), $\oint_{(C)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$ (circulation conservative).

Et par ailleurs : $\oint_{(C)} \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \boldsymbol{V(A) - V(B)}$ (voir EM1)

IV)3) Equation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson traduit localement la **conservation du flux magnétique** (forme intégrale) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

IV)4) Equation de Maxwell-Ampère

ε_0 : Permittivité diélectrique du vide, $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$:

L'équation de Maxwell-Ampère relie le champ magnétique $\vec{B}$ à ses sources :

- $\mu_0\vec{j}$ avec $\vec{j}$ densité volumique de courant,
- $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ qui traduit de nouveau le couplage entre les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ en régime variable.

L'équation de Maxwell-Ampère est la forme locale du **Théorème d'Ampère** (forme intégrale) :

$$\oint_{(C)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0.I_e$$

V) EQUATION DE CONSERVATION DE LA CHARGE ET LOI D'OHM

V)1) Equation de conservation de la charge en régime variable

En régime stationnaire / permanent, les sources de champ électrique sont les charges et les sources de champ magnétique sont les courants :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0\vec{j}$$

En régime variable, ρ et $\vec{j}$ sont liés :

$\boldsymbol{\vec{j} = \rho_l.\vec{v}}$

$\boldsymbol{\rho_l}$: densité volumique de charges libres (C.m^{-3})

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

Analogie avec la mécanique des fluides : Equation locale de conservation de la masse :

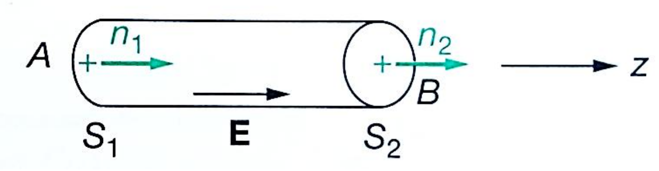
$$\boldsymbol{div(\overrightarrow{J_M}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

En régime stationnaire / permanent : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

⇨ $div(\vec{j}) = 0$, $\vec{j}$ est à flux conservatif

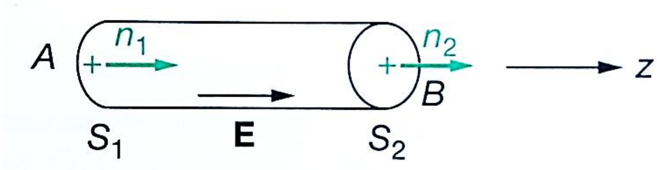
V)2) Loi d'ohm (forme locale)

Loi d'ohm locale dans un milieu conducteur :



V)3) Conservation de l'intensité le long d'une branche

Conducteur cylindrique : Axe Oz, longueur L, conductivité électrique σ.



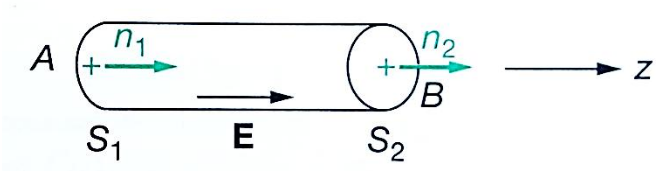
Hypothèse : Champ électrique uniforme et stationnaire

S surface fermée : $S = S_1 \cup S_2 \cup T$

$div(\vec{j}) = 0 \Rightarrow \oiint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = 0 \Leftrightarrow \iint_{S_1} \vec{j}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \vec{j}.\overrightarrow{dS} + \iint_T \vec{j}.\overrightarrow{dS} = I_1 - I_2 + 0 = 0$

Conclusion :

V)4) Loi d'ohm (forme intégrale)



Avec :

$$\boldsymbol{R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{L}{\sigma S}}$$

R : résistance électrique (Ω)	σ : conductivité électrique ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)
L : longueur du conducteur (m)	S : section du conducteur (m^2)

Analogie avec la conduction thermique :

R_{th} : résistance thermique ($K.W^{-1}$)

λ : conductivité thermique ($W.\ K^{-1}.m^{-1}$)

L : longueur du conducteur (m)

S : section du conducteur (m^2)

V)5) Effet joule

La puissance cédée aux porteurs de charge (ions, électrons) par le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ s'écrit :

$$\boldsymbol{P_{\text{cédée}}} = \iiint_{espace} \boldsymbol{\vec{j}.\vec{E}.d\tau}$$

Pour un conducteur : $\boldsymbol{\vec{j} = \sigma.\vec{E}}$

D'où :

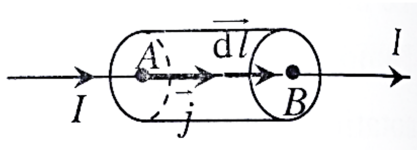
$$\boldsymbol{P_{\text{cédée}}} = \iiint_{espace} \boldsymbol{\vec{j}.\frac{\vec{j}}{\sigma}.d\tau} = \iiint_{espace} \boldsymbol{\frac{j^2}{\sigma}.d\tau} = \iiint_{espace} \boldsymbol{\rho_r.j^2.d\tau}$$

Avec : $\boldsymbol{\rho_r = \frac{1}{\sigma}}$ résistivité électrique (Ω.m)

$$\boldsymbol{P_{\text{cédée}}} = \iiint_{espace} \boldsymbol{\vec{E}.\vec{j}.d\tau} = \int_A^B \boldsymbol{\vec{E}}\left[\iint_S \boldsymbol{\vec{j}.\overrightarrow{dS}}\right]\boldsymbol{\overrightarrow{dl}}$$

$$= \left(\int_A^B \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dl}}\right)\boldsymbol{.I} = \boldsymbol{(V(A) - V(B))I = U.I}$$

$$= \boldsymbol{RI^2}$$



La **puissance cédée** correspond à la puissance **dissipée par effet joule**.

VI) APPROXIMATION DES REGIMES QUASI-STATIONNAIRES (ARQS)

VI)1) Equation de conservation de la charge dans l'ARQS

Equation de conservation de la charge, ou équation de continuité :

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Pour un conducteur :

$$\vec{j} = \sigma.\vec{E}$$

$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\rho = 0}$ Equation différentielle de ρ en fonction du temps

Solution :

Ordre de grandeur de τ :

$\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12}\ F.m^{-1}$, $\sigma = 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$

Conséquence 1 : Très rapidement, un conducteur devient « neutre » en volume : $\rho \approx 0$. Comme en régime stationnaire, les charges s'accumulent au niveau de la surface du conducteur (densité surfacique de charges σ).

Conséquence 2 : Unicité de l'intensité du courant dans un conducteur, loi des nœuds vérifiée (pas d'accumulation de charges au niveau d'un nœud).

VI)2) Champs électrique et magnétique dans l'ARQS

Les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ se propagent (onde progressive) à une vitesse c de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière $c_0 = 3.10^8\ m.s^{-1}$ dans le vide.

Onde progressive : $\lambda = c.T = \frac{c}{f}$ avec λ période spatiale ou longueur d'onde (m), T période temporelle (s)

ARQS : si $L \ll \lambda = \frac{c}{f}$, avec L longueur du circuit étudié

- ⇨ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ n'ont « pas le temps » de varier
- ⇨ Ils sont « quasi-stationnaires »

Exemple :

$L = 1m$; $\frac{c}{f} \gg L\ ou\ f \ll \frac{c}{L} = 3.10^8 Hz = 300MHz$ =>on peut appliquer l'ARQS

Conséquence :

VII) BILAN : EQUATIONS DE MAXWELL (1)

Equation	**Statique** Présence de sources	**Remarques**	**Variable Quelconque** Présence de sources
Maxwell Gauss $div\vec{E} =$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Forme locale du théorème de Gauss $\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} =$	$\vec{0}$	La **circulation** du champ électrostatique est **conservative**	$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Thomson ou Maxwell Flux $div\vec{B} =$	**0**	Le champ magnétique est à **flux conservatif**	**0**
Maxwell Ampère $\overrightarrow{rot}\vec{B} =$	$\mu_0\vec{J}$	Forme locale du théorème d' Ampère $\oint_{(C)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0.I_e$	$\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$