DEVOIR MAISON N°10

ELECTROSTATIQUE

- **A rendre le MARDI 11 MARS 2025**

A- Etude d'un réacteur plasma

I- Réacteur plasma sous tension continue

Les deux électrodes du réacteur sont des disques centrés sur l'axe z, de rayon $a/2$ et d'épaisseur négligeable. Elles sont parallèles et leur distance est notée d $(d > 0)$. On applique une tension continue $U > 0$ entre les deux électrodes du réacteur. L'électrode supérieure porte alors une charge $-q$ et l'électrode inférieure une charge $+q > 0$. Le réacteur contient un gaz d'argon peu dense, encore non ionisé et de permittivité diélectrique assimilable à celle du vide, notée ε_0.

a) Champ électrique créé par l'électrode inférieure :

L'électrode inférieure, d'axe Oz et de centre O, est supposée être chargée avec une densité surfacique de charge σ uniforme. On a $d \ll a$ et on va s'intéresser à l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette électrode pour des points M de cote z proches de l'axe Oz et tels que $0 < z < d$ (figure 4). Dans ces conditions on pourra, dans un premier temps, négliger les effets de bord et considérer que $\vec{E}(M) \approx E(z)\overrightarrow{u_z}$.

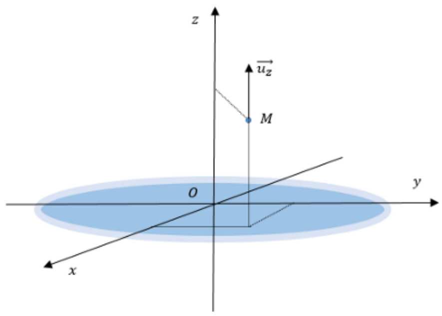


Figure 4

1) Enoncer le théorème de Gauss en nommant les grandeurs introduites et en rappelant leurs unités respectives.
2) Appliquer, en s'appuyant sur un schéma soigné, le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ aux points M envisagés en fonction de σ.

b) Champ électrique dans le réacteur complet

L'électrode supérieure, parallèle à l'électrode inférieure et de même axe, est chargée avec une densité surfacique uniforme $-\sigma$. On considère encore des points M proches de l'axe Oz pour lesquels on peut encore négliger les effets de bord.

3) En utilisant le principe de superposition, exprimer le champ électrique total $\vec{E}_{tot}(M)$ à l'intérieur du réacteur en fonction de σ et ε_0.
4) Représenter l'allure de la fonction $E_{tot}(z)$ pour $0 < z < d$.
5) Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ associé à $\vec{E}_{tot}(M)$ en fonction de U, d et z en posant $V(z = 0) = U/2$.
6) Tracer l'allure de $V(z)$ pour $0 \leq z \leq d$.

c) Tension de claquage du gaz : résolution de problème

Cette question n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat, une rédaction complète et soignée est attendue. Toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

7) Le réacteur contient un gaz d'argon initialement neutre. On veut estimer la tension U_0 minimale à appliquer entre les électrodes permettant d'assurer l'ionisation de ce gaz en cherchant à décrire un début d'effet d'avalanche. Pour cela, on suppose l'existence d'un électron primaire initialement au repos, qui se détache d'une électrode. Cet électron interagit principalement avec le champ électrique du réacteur et va rentrer en collision avec un atome d'argon supposé immobile et situé au centre du réacteur après un parcours typique de $l \approx 1\ \mathrm{mm}$. Un électron secondaire peut être alors émis. Sachant qu'il faut fournir une énergie $\Delta E \approx 2{,}5 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$ à un atome d'argon pour l'ioniser, calculer U_0.

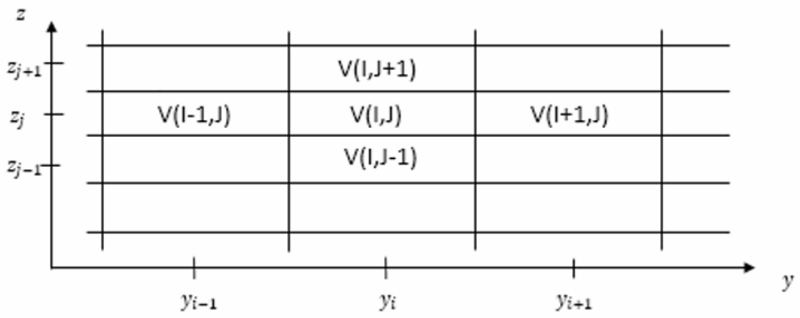
   La charge élémentaire sera approchée par la valeur $e \approx 10^{-19}\ C$ et on rappelle qu'une charge q en un point M et dans un potentiel électrostatique $V(M)$ est, à une constante près, affectée d'une énergie potentielle $qV(M)$.

d) Evaluation des effets de bord

Dans ce paragraphe, on souhaite étudier comment la prise en compte des effets de bord affecte les résultats concernant le champ et le potentiel électrique obtenus au paragraphe I)b). Pour faciliter l'étude, on se limitera à un problème à deux dimensions et on admettra que dans le plan $x = 0$, le potentiel électrostatique V satisfait l'équation de Laplace suivante* :

$$\frac{\partial^2 V(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(y,z)}{\partial z^2} = 0$$

On souhaite écrire un programme informatique permettant de déterminer la fonction potentiel électrostatique dans le réacteur alimenté en $\pm 10\,V$. La solution de ce problème doit vérifier l'équation de Laplace ci-dessus et les conditions aux limites imposées au potentiel $V(y,z)$ par l'expérimentateur qui sont ici $V\left(y = \pm\frac{a}{2}; z\right) = 0$. Dans ce programme, on va chercher à calculer le potentiel en différents points $(x = 0; y_i; z_j)$ du réacteur avec $\left(0 \leq z_j < 20\right) mm$ et $(-10 \leq y_i < +10) cm$. Le potentiel est calculé tous les millimètres verticalement et horizontalement. Ainsi, le potentiel est décrit dans un tableau de taille 201x21 où le réel V(I,J) contient la valeur en volt de $V\left(y_i, z_j\right)$. Le tableau suivant représente une partie de la discrétisation de l'espace en cellules.



Pour résoudre l'équation de Laplace, nous allons appliquer la méthode d'Euler. A titre d'exemple, cette méthode consiste à associer la dérivée partielle $\frac{\partial V(y,z)}{\partial y}$ à la quantité V(I+1,J)-V(I,J).

8) Ecrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial V(y,z)}{\partial z}$ en fonction de V(I,J+1) et V(I,J).
9) Ecrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial^2 V(y,z)}{\partial z^2}$ en fonction de V(I,J+1),V(I,J-1) et V(I,J).
10) Ecrire alors la définition à donner à V(I,J) avec la méthode d'Euler, en fonction de V(I+1,J), V(I,J+1), V(I-1,J) et V(I,J-1).

On a représenté ci-dessous (figure 5) le résultat de la simulation en traçant les équipotentielles -7,5V ; -5V ; -2,5V ; 0V ; 2,5V ; 5V ; 7,5V dans le plan $x = 0$ entre les électrodes.

On a représenté ci-dessous (figure 5) le résultat de la simulation en traçant les équipotentielles -7,5V ; -5V ; -2,5V ; 0V ; 2,5V ; 5V ; 7,5V dans le plan $x = 0$ entre les électrodes.

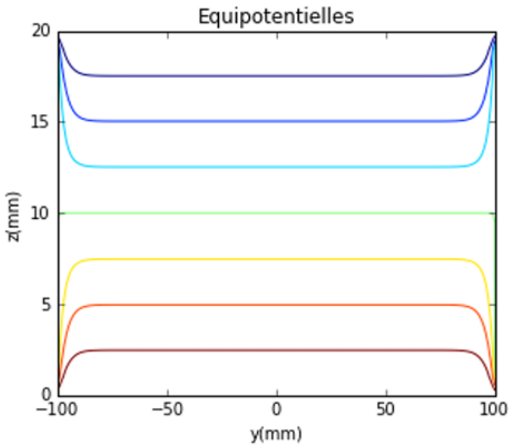


Figure 5

11) Proposer, avec justification, un encadrement des valeurs y et z pour lesquelles l'approximation $\vec{E}(M) \approx E(M)\overrightarrow{u_z}$ est pertinente.
12) Dans cette zone où $\vec{E}(M) \approx E(M)\overrightarrow{u_z}$, pouvons-nous affirmer que le champ électrique est uniforme ? Justifier votre réponse.