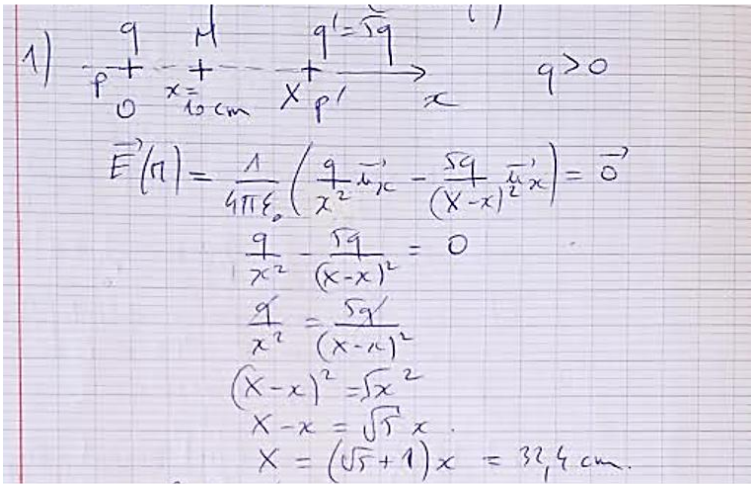
EM1 ELECTROSTATIQUE DU VIDE

Travaux Dirigés

Exercice 1

Une charge $q = 3\mu C$ est placée à l'origine O d'un axe (Ox). Où doit-on placer une charge $q' = 5.q$ sur cet axe pour que le point d'abscisse $x = 10cm$ ressente un champ électrostatique nul ?



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2}\vec{u}_x - \frac{5q}{(X-x)^2}\vec{u}_x\right) = \vec{0}$$

$$\frac{q}{x^2} - \frac{5q}{(X-x)^2} = 0$$

$$\frac{q}{x^2} = \frac{5q}{(X-x)^2}$$

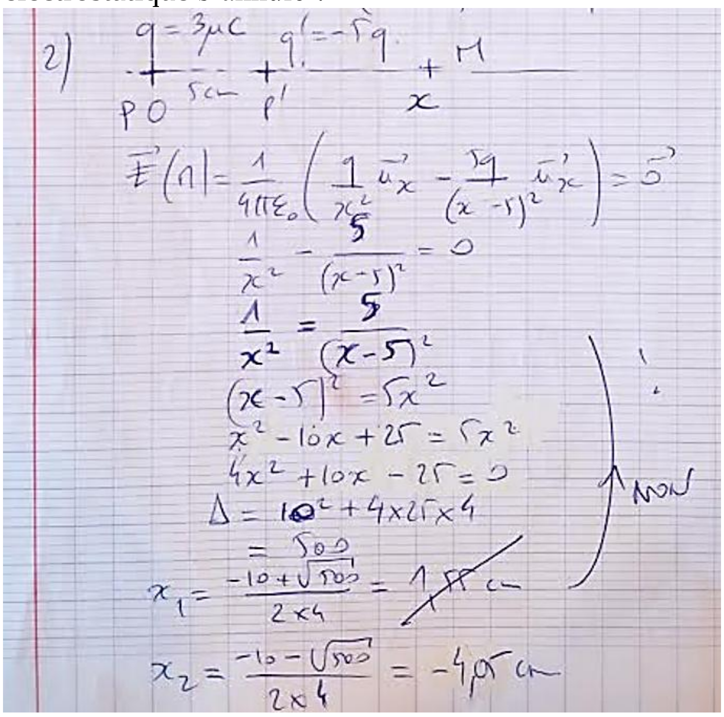
$$(X-x)^2 = 5x^2$$

$$X - x = \sqrt{5}\,x$$

$$X = (\sqrt{5}+1)x = 32{,}4 \text{ cm.}$$

Exercice 2

Une charge $q = 3\mu C$ est placée à l'origine O d'un axe (Ox). Une charge $q' = -5.q$ est placée sur ce même axe en $x = 5cm$. Où se trouve(nt) sur cet axe le(s) point(s) où le champ électrostatique s'annule ?



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2}\vec{u}_x - \frac{5q}{(x-5)^2}\vec{u}_x\right) = \vec{0}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{5}{(x-5)^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{5}{(x-5)^2}$$

$$(x-5)^2 = 5x^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 5x^2$$

$$4x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$\Delta = 10^2 + 4\times 25\times 4 = 500$$

$$x_1 = \frac{-10+\sqrt{500}}{2\times 4} = \cancel{1{,}55 \text{ cm}}$$

NON

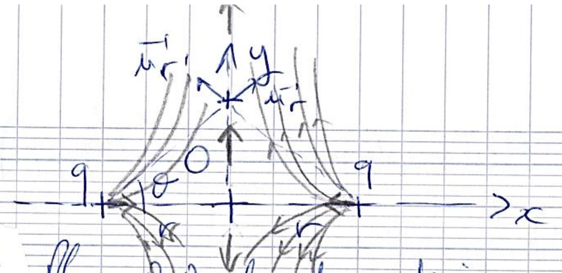
$$x_2 = \frac{-10-\sqrt{500}}{2\times 4} = -4{,}05 \text{ cm}$$

Exercice 3

On place deux charges identiques positives sur un axe (Ox) à égale distance de l'origine O. On travaille dans le plan (xOy).

a) Exprimer (direction, sens et intensité) le champ électrostatique en O.
b) Pourquoi peut-on dire que l'axe (Ox) est une ligne de champ ?
c) Exprimer le champ électrostatique en tout point de l'axe (Oy).
d) Orienter les lignes de champ électrostatique lorsqu'on est très proche d'une des charges (le champ étant par conséquent celui de la charge en question).
e) Sachant que les lignes de champ ne se coupent pas , tracer quelques lignes de champ dans le plan (xOy).

3)



Plan Oyz plan de symétrie
Ox, Oy axe de symétrie
$\Rightarrow \vec{E}$ symétrique par rapport à Oy

a) $\vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\vec{u}_x - \frac{q}{r^2}\vec{u}_x\right) = \vec{0}$

b) Ox ligne de champ car $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M)$ sont colinéaires si $M \in Ox$
$\Rightarrow E_{TOT}$ suivant Ox

c) $M \in Oy \Rightarrow \vec{E}(M)$ suivant Oy (symétrie)

$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\vec{u}_r + \frac{q}{r^2}\vec{u}_{r'}\right)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $r^2 = x^2+y^2$

$\vec{u}_r = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos\theta}\vec{u}_x + \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\sin\theta}\vec{u}_y$

$\vec{u}_{r'} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{u}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{u}_y$

$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2yq}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\vec{u}_y$

d) Voir dessin.

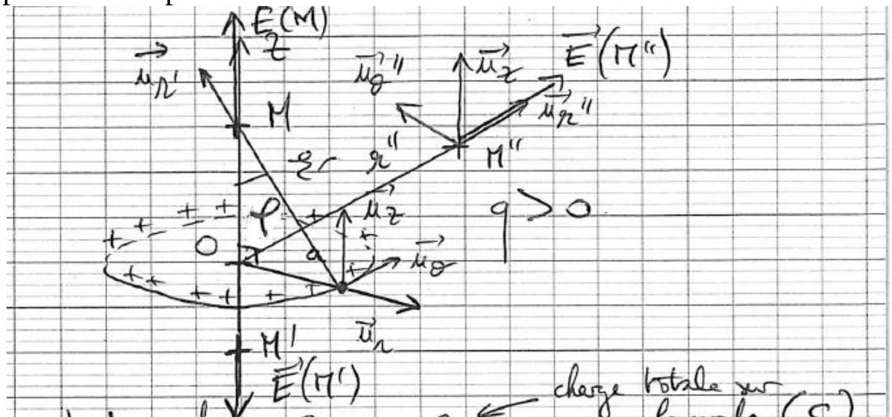
Exercice 4

Un cercle de centre O et de rayon a porte une charge $q > 0$ répartie uniformément sur son périmètre.

a) Exprimer la densité linéique de charge λ en fonction de q et a.

b) En invoquant la symétrie de la distribution, donner l'allure (c'est-à-dire la direction, le sens et l'intensité si elle est calculable) du champ électrostatique en O puis en tout point de l'axe du cercle.

c) En invoquant la symétrie de la distribution, déterminer la direction et le sens en tout point du plan contenant le cercle à une distance r de son centre O.



a) $\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{l} = \frac{q}{2\pi a}$ ← charge totale sur le cercle (C) ; $2\pi a$ ← périmètre du cercle (m)

λ : $C.m^{-1}$

b) Symétries de la distribution de charge :

* Tout plan Π_1 passant par Oz (Tout plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$)

$\Rightarrow \vec{E}(O) \in \Pi_1$

* Plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: Π_2

$\Rightarrow \vec{E}(O) \in \Pi_2$

Conclusion :

$\vec{E}(O) = \vec{0}$

Détermination de $\vec{E}(O)$

Détermination de $\vec{E}(M)$ (ou $\vec{E}(M')$) pour M (ou M') $\in$ Axe du cercle $= (Oz)$.

Symétries de la distribution de charge :

* Plan $(M, \vec{u}_{r'}, \vec{u}_z)$: Plan Π_1 (Tout plan Π_1)

$\Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_1$ (Tout plan Π_1)

$\Rightarrow \vec{E}(M)$ suivant $\vec{u}_z$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z \vec{u}_z$

Calcul de $\vec{E}(M)$ pour $M \in (Oz)$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{cercle}\frac{\lambda . dl}{r'^2}\,\vec{u_{r'}}$$

avec :

$$r' = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$\vec{u_{r'}} = -\sin\varphi\,\vec{u_r} + \cos\varphi\,\vec{u_z}$$

$$= -\frac{a}{r'}\vec{u_r} + \frac{z}{r'}\vec{u_z}$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\vec{u_r} + \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\vec{u_z}$$

$$dl = a.d\theta$$

d'où :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda . a\,d\theta}{a^2+z^2}\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\vec{u_r} + \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\vec{u_z}\right)$$

On intègre suivant θ : λ, a, z et $\vec{u_z}$ sont des constantes.

Par ailleurs, on sait, par l'étude des symétries, que $\vec{E}(M)$ ne contient pas de composante suivant $\vec{u_r}$.

On obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda a z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}\,d\theta$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\,\cancel{2\pi}\,\frac{\lambda a z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}}$$

$$\begin{array}{ccc} C & F & V \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Q & = C & U \end{array}$$

Vérifs : 1) $[E] = \frac{C.m^{-1}.m.m}{F.m^{-1}.m^3} = \frac{\cancel{F}.V.m}{\cancel{F}.m^2} = V.m^{-1}$

2) Si $z = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$. On retrouve le résultat pour O.

3) Si $z \to \infty$, $\vec{E} \to \vec{0}$ en ne gardant que les termes les plus grands en z.

4) Si $a \to 0$, avec $\lambda a = \frac{q}{2\pi}$:

$$\vec{E} = \frac{q\cancel{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^{3/2}}\vec{u_z}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{u_z}$$

On retrouve le champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q située en O.

c) Pour un point M'' situé dans le plan du cercle à une distance r'' de O :

Symétries de la distribution de charges passant par M'' :

* Plan $(O, \vec{u_{r''}}, \vec{u_z})$
* Plan $(O, \vec{u_{r''}}, \vec{u_{\theta''}})$.

$\Rightarrow \vec{E} \in (O, \vec{u_{r''}})$

$\Rightarrow \vec{E}$ suivant $\vec{u_{r''}} \Leftrightarrow \vec{E}$ radial.

Exercice 5

Un fil rectiligne infini est chargé uniformément par une densité linéique $\lambda = 5\mu C/m$.

a) Exprimer le champ électrostatique (direction sens et intensité) en tout point de l'espace.

A une distance $d = 5cm$ du premier fil, on en dispose un second parallèle au premier, chargé uniformément par la densité linéique $-\lambda$.

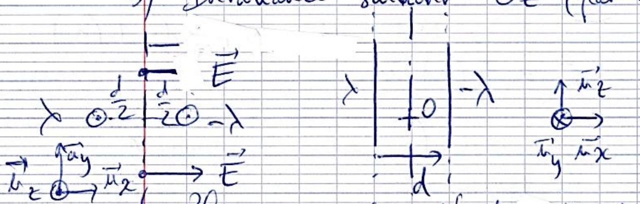
b) Exprimer le champ électrostatique en tout point du plan situé à égale distance des deux fils

a) Voir cours : $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$

b) Invariance suivant Oz (par translation)

$\Downarrow$

E ne dépend pas de z



Plan yOz plan d'antisymétrie $\Rightarrow \vec{E} \perp yOz$

Tout plan xOy plan de symétrie.

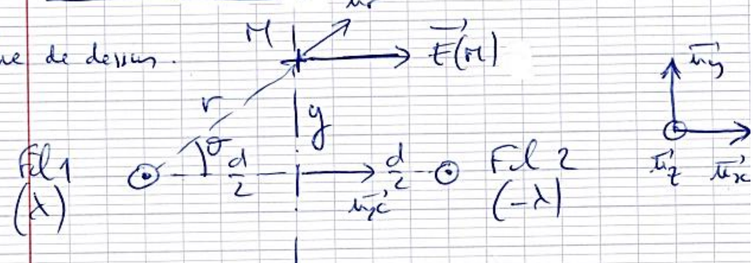
$\Rightarrow \vec{E}$ suivant $\vec{u_x}$ dans le plan yOz.

Sens : dans le sens de $\vec{u_x}$

$\Rightarrow \vec{E} = E(y).\vec{u_x}$ dans le plan yOz.

Exercice 5 TD1 (suite)

Vue de dessus.



$\vec{E_1}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$

$\vec{E_{1x}}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\,\vec{u_x}$

et $\vec{E_{2x}}(M) = \vec{E_{1x}}(M)$

d'où :

$\vec{E}(M) = 2 \times \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\,\vec{u_x}$

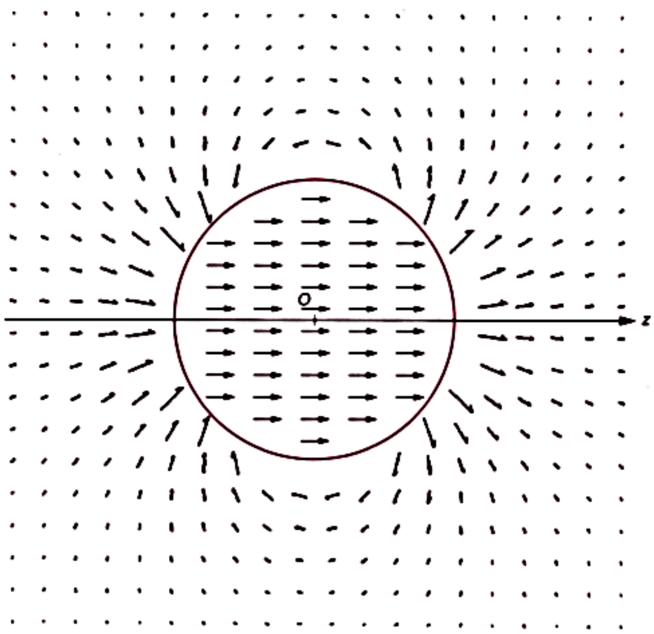
avec $r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$ et $\cos\theta = \dfrac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}$

$\vec{E}(M) = \cancel{2} \times \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} \times \dfrac{\frac{d}{\cancel{2}}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}\,\vec{u_x}$

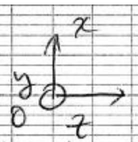
$\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)}\vec{u_x}$

Exercice 6

Un champ vectoriel a une carte de champ invariante par rotation autour de l'axe Oz, dont la représentation dans le plan xOz est donnée ci-dessous.



a) Quels sont les plans de symétrie présentés par ce champ ?
b) Ce champ admet-il un plan d'antisymétrie ?
c) Vérifier que la direction du champ, en des points des plans trouvés ci-dessus, est conforme aux attentes.
d) Que peut-on dire concernant le champ sur l'axe Oz ?



a) Tout plan passant par (Oz) car champ invariant par rotation autour de Oz.

b) Plan xOy.

c) Dans le plan xOz (de la figure), le champ $\vec{E}$ est dirigé dans ce plan car xOz plan de symétrie

En tout point du plan xOy (plan d'antisymétrie) le champ $\vec{E}$ est $\perp$ à ce plan.

d) Oz intersection de tous les plans de symétrie
$\Rightarrow$ $\vec{E}$ suivant Oz 4

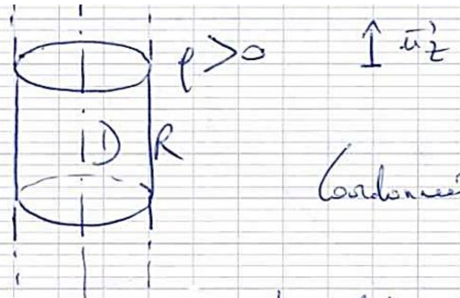
Exercice 7

Un cylindre infini d'axe D et de rayon R porte la charge volumique uniforme $\rho > 0$.

a) En invoquant des raisons de symétrie, préciser la direction et le sens du champ en tout point d'un cylindre coaxial au précédent et de rayon r.

b) Calculer le champ $\vec{E}$ à la distance r de D. On étudiera les 2 cas : $r \leq R$ et $r \geq R$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $E(r)$.



Coordonnées cylindriques !

a) Invariance par translation suivant Oz

$\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de z.

Plans de symétrie :

Π plan $\perp$ à z

Π plan passant par D

Invariance par rotation autour de D

$\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de θ

Concl :

$\vec{E}$ radial et ne dépend que de $E(r)$

$\vec{E} = E(r).\vec{u}_r$

b) Cylindre coaxial hauteur h, rayon r.

Th. de Gauss :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(r).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Cas $r \geq R$

$$E(r) \oiint_\Sigma \vec{dS} = E(r).r.2\pi.h = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2r}$$

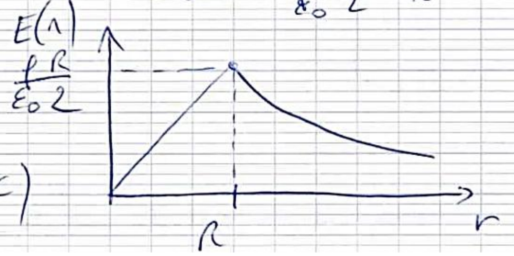
$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2r}\vec{u}_r$$

Cas $r \leq R$ $\quad E(r).r.2\pi.h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r}{2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r}{2}\,\vec{u_r}$$

c)



Exercice 8

Un cylindre infini d'axe D et de rayon R porte une charge répartie uniformément en surface de densité $\sigma > 0$.
a) En invoquant des raisons de symétrie, préciser la direction et le sens du champ en tout point d'un cylindre coaxial du précédent et de rayon r.
b) Calculer le champ $\vec{E}$ à la distance r de D en fonction de r, R, σ et des constantes nécessaires.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction $E(r)$.

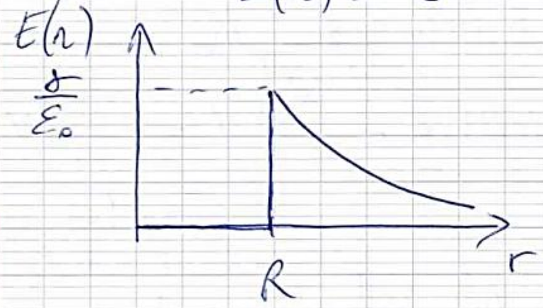
b) $r \geq R \Rightarrow \vec{E} = E(r).\vec{u_r}$ Mêmes surfaces de Gauss qu'à l'exercice 1.

$$E(r).r.2\pi.h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.R.2\pi.h$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r} \qquad \vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}\,\vec{u_r}$$

$r \leq R$ $\quad Q_{int} = 0$

$$\vec{E}(r) = \vec{0}$$



Exercice 9

Une sphère de centre O de rayon $R = 5cm$ porte une charge $q = 1\mu C$ uniformément répartie en surface.

a) Exprimer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

On place autour de cette sphère une seconde sphère de rayon $2R$ de même centre. Cette deuxième sphère porte une charge $-q$.

b) Exprimer le champ électrostatique créé par ces deux sphères en tout point de l'espace.

c) Calculer la différence de potentiel entre ces deux sphères.

(Cours)

a) À extérieur $\Rightarrow \vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

À intérieur $\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$

b) $0 \leq r \leq R \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$

$R \leq r \leq 2R \Rightarrow \vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$r \geq 2R \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$

c) Entre les 2 sphères :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{\partial}{\partial r}(V)\vec{u_r}$$

en coordonnées sphériques avec $\vec{E} = E(r).\vec{u_r}$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(V) = -\frac{d}{dr}(V) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$$

Hyp : $V(r)$ nul à l'∞ $\Rightarrow cte = 0$

$$V(R) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V(2R) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)}$$

$$U = V(R) - V(2R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1.10^{-6}}{5.10^{-2}\times 2} \times 9.10^{9}$$

$$= 1{,}8.10^{5}\ V$$

4

Exercice 10

Une boule de centre O et de rayon $R = 10cm$ porte la charge $Q = 10\mu C$ uniformément répartie en volume.

a) Calculer le champ électrostatique en tout point de l’espace.
b) Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution au centre O si on prend ce potentiel nul à l’infini

a. $r \geq R$ $\quad \vec{E} = E(r).\vec{u_r}$ (cf. symétries / invariances)

Surface de Gauss sphérique !

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(r).\vec{u_r}.\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E(r).4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$ identique à sphère chargée en surface

$r \leq R$ $\quad \vec{E} = E(r).\vec{u_r}$ (cf. symétries / invariances)

$$E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

b) $$-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ à l'extérieur

$$V(r) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

$$V(\infty) = 0 = V_0$$

$$\Rightarrow V(r) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ à l'extérieur.

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \quad \text{à l'intérieur.}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3} + V_1$$

Pour $r = R$

$$V(r) = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + V_1$$

mais aussi

$$V(r) = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \quad \text{(continuité du potentiel en } r = R\text{)}$$

d'où : $V_1 = +\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$

A l'intérieur, on a donc :

$$V(r) = -\frac{Q r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Potentiel en O ($r = 0$)

$$V(r) = +\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

<u>Exercice 11</u>

Dessiner les lignes de champ et les surfaces équipotentielles dans les cas suivants :

a) Cylindre chargé en volume,
b) Sphère chargée en volume,
c) Plan chargé en surface.

<u>Exercice 12</u>

Dans l'espace muni d'un repère cartésien (O,x,y,z), un champ électrique est défini par son potentiel :

- $V(x, y, z) = -E_0\frac{x^2}{2a}$ pour $-a \leqslant x \leqslant a$;
- $V(x, y, z) = -E_0 x + E_0\frac{a}{2}$ pour $x > a$;
- $V(x, y, z) = E_0 x + E_0\frac{a}{2}$ pour $x < -a$,

où E_0 est une constante.

a) Mettre en évidence des invariances permettant d'affirmer que le champ électrique a une direction fixe.
b) Exprimer le champ dans les différents domaines.
c) Peut-on parler de champ uniforme.

$V(x,y,z) = -E_0 \frac{x^2}{2a}$ pour $-a \le x \le a$

$V(x,y,z) = -E_0 x + E_0 \frac{a}{2}$ pour $x > a$

$V(x,y,z) = +E_0 x + E_0 \frac{a}{2}$ pour $x < -a$

a) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = +E_0 \frac{x}{a}$ pour $-a \le x \le a$

$= E_0$ pour $x > a$

$= -E_0$ pour $x < -a$

$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$

$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

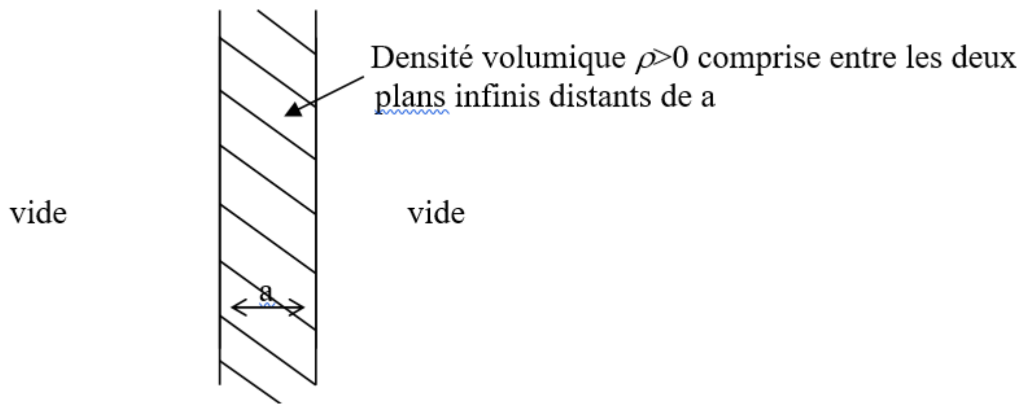
Champ dirigé suivant $\vec{u}_x$ en tt point.
De plus : E_x ne dépend que de x
Invariance suivant y et z.

b) Fait.

c) Champ uniforme pour $x > 0$
$x < -a$.
Champ non uniforme entre $-a$ et a.

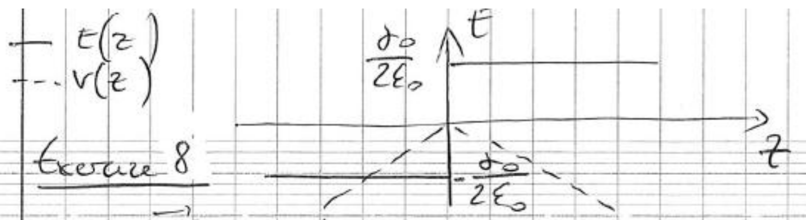
Exercice 13

a) Déterminer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan uniformément chargé en surface (densité σ). En déduire le potentiel si on le prend nul sur le plan. Tracer les fonctions $E(z)$ et $V(z)$.
b) On considère maintenant le système suivant :



- Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
- Tracer la fonction $E(z)$.

- En déduire le potentiel si on le prend nul au centre de la distribution.
- Tracer la fonction $V(z)$.



Exercice 8

a – $\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ si $z>0$

$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ si $z<0$

$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + cte$

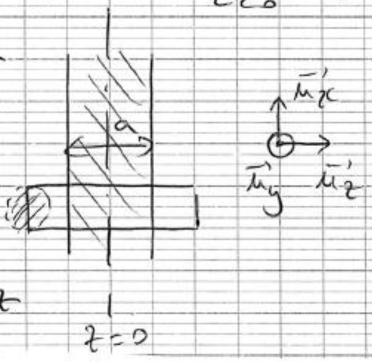
A $z=0$, $V(z)=0$

$\Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z$ pour $z>0$

$V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z$ pour $z<0$

b –

Cylindre Gauss
Hauteur $2z$
Rayon R



Symétrie par rapport au plan xOy

$\Rightarrow E(M)$ suivant $\vec{u_z}$

Invariance suivant x et y

$\Rightarrow E(M)$ ne dépend que de z

Concl :

$\vec{E}(M) = E(z).\vec{u_z}$

De plus $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$ (symétrie)

Gauss : $\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

8

* $z \geq \frac{a}{2}$ ou $z \leq -\frac{a}{2}$

$$\cancel{2}\, E(z)\, \cancel{\pi R^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot a \cdot \cancel{\pi R^2}$$

$\rho a \Leftrightarrow \sigma$

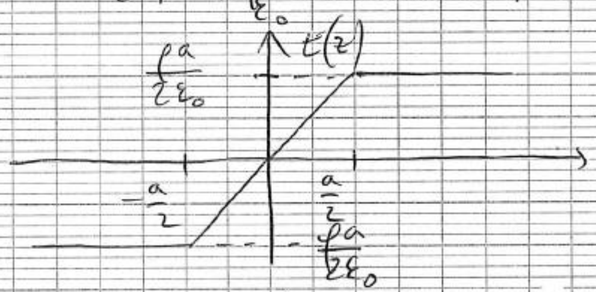
$$E(z) = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \quad \text{si } z > 0$$

$$E(z) = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \quad \text{si } z < 0$$

* $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$

$$\cancel{2} \cdot E(z)\, \cancel{\pi R^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cancel{2} z\, \cancel{\pi R^2}$$

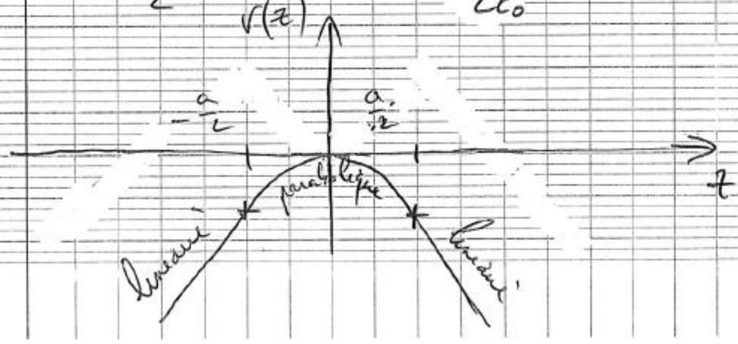
$$\left.\begin{aligned} E(z) &= \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \quad \text{si } z > 0 \\ E(z) &= +\frac{\rho z}{\varepsilon_0} \quad \text{si } z < 0 \end{aligned}\right| \ \forall z \ !$$



$z \leq -\frac{a}{2} \Rightarrow V(z) = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} z + A$

$-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \Rightarrow V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + \cancel{\beta}$ $\quad V(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$z > \frac{a}{2} \Rightarrow V(z) = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} z + C$



Exercice 14

Soit une sphère de centre O de rayon $R = 1cm$ portant une charge $q = 1\mu C$ répartie uniformément en surface.

a) Exprimer, en tout point M de l'espace, le champ et le potentiel V en fonction de la distance r séparant M de O. On prendra le potentiel nul en un point situé à une distance infinie de la sphère.

On rappelle que, pour une fonction $f(r)$ ne dépendant que de r, le gradient prend pour expression :

$\overrightarrow{grad}f = \frac{df}{dr}.\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le premier vecteur de la base sphérique.

A 1mm de la surface de la sphère précédente on place une charge ponctuelle de même valeur $q = 1\mu C$. On appelle P cette charge.

b) Calculer l'intensité de la force électrostatique qui s'exerce sur cette charge de la part de la sphère. Cette force est-elle répulsive ou attractive ? (on donne $1/(4.\pi.\varepsilon_o)=9.10^9$usi)

On lâche cette charge P de masse $m = 1g$ sans vitesse initiale à 1mm de la surface de la sphère et on la laisse évoluer sous l'action de la seule force de Coulomb.

c) Calculer la valeur de la vitesse de P lorsqu'elle se retrouve à une distance infinie de la sphère.

Exercice 1

a) → Voir cours

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$$

$$V(M) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \underbrace{cte}_{0}$$ car $V(\infty) = 0$

b) Théorème de Coulomb : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$

Ou Gauss avec $r \simeq R$

$$\oint\!\!\oint E(r).\overrightarrow{u_r}.dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$q = \sigma S$
$q = \sigma 4\pi R^2$

$$E(r) \times 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi R^2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = q.E(r) = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q^2}{4\pi R^2\varepsilon_0} = \frac{10^{-12}}{10^{-4}} \times 9.10^9 = 90\,N$$

Force répulsive !

Forces conservatives : $\vec{F}$ et $\vec{P}$
⇒ Conservation énergie mécanique

$$E_p(r) + \cancel{E_c(r)} = \cancel{E_p(\infty)} + E_c(\infty)$$

$$E_c(\infty) = \frac{1}{2}mv^2 = E_p(r) = q.V(r)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

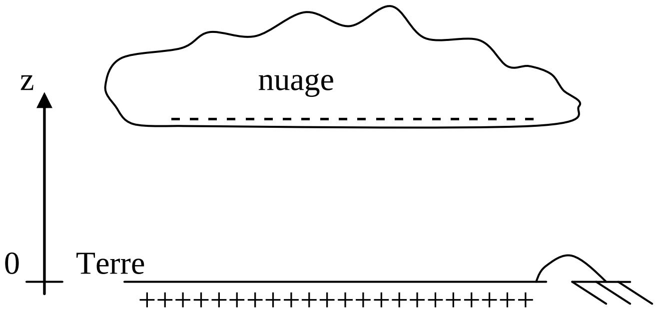
$$v = \sqrt{\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{-12}}{10^{-3}\times 10^{-2}}\times 9.10^{9}}$$

$$= \sqrt{2\times 9 \times \frac{10^{-12}}{10^{-5}}\times 10^{9}}$$

$$= \sqrt{18\times 10^{2}} = 42\ m.s^{-1}$$

Exercice 15

Un nuage dont la base, situé à $h = 200m$ du sol, et chargée négativement, crée avec la Terre (conductrice) chargée en surface positivement un champ électrostatique vertical uniforme $E0$=10^4 V/m :



a) Quel est le sens de ce champ ? Représenter quelques lignes de champ.
b) En choisissant comme référence des potentiels le potentiel de la terre ($V = 0$ à la surface du sol), déterminer l'expression du potentiel en fonction de l'altitude z.
c) En supposant le champ de pesanteur uniforme g, déterminer de même l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de z (on pourra choisir comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur celle correspondant au sol $z = 0$). (g=9,8m/s)
d) Une gouttelette d'eau liquide de masse $m = 0{,}2g$ chargée positivement $q = 0{,}2\mu C$, provenant du nuage, pénètre dans cette zone de champ uniforme avec une vitesse V_0=3m/s. Son mouvement est vertical descendant et on suppose qu'elle ne subit que son poids et la force de Coulomb. Par conservation de l'énergie mécanique calculer l'altitude minimale atteinte par la gouttelette.
e) Une seconde gouttelette de masse $m = 0{,}4g$ elle aussi chargée positivement q=0,2µC, pénètre dans cette zone de champ uniforme avec une même vitesse Vo=3m/s.Quelle est sa vitesse quand elle atteint le sol ?

a. Le champ descend les potentiels : vers le ha

b. $\vec{E} = E(z).\vec{u}_z$

avec $E(z) = E$ = constante.

$\vec{E} = E.\vec{u}_z$

$\Rightarrow V(z) = -Ez + cte$ avec $V(0) = 0$

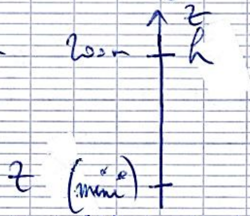
d'où :

$$V(z) = -Ez.$$

$$V(z) = -E_0 . z$$

c. $E_{pp} = \rho g z.$

d.



$$E_M(h) = E_c(h) + E_{pp}(h) + E_{pE}(h)$$
$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - qE_0h.$$

$$E_M(z) = E_c(z) + E_{pp}(z) + E_{pE}(z)$$
$$= 0 + mgz - qE_0z.$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - qE_0h = mgz - qE_0z$$

$$z = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - qE_0h}{mg - qE_0}$$

$$z = \frac{0{,}5 \times 0{,}2.10^{-3} \times 3^2 + 0{,}2.10^{-3} \times 9{,}8 \times 200 - 0{,}2.10^{-6} \times 10}{0{,}2.10^{-3} \times 9{,}8 - 0{,}2.10^{-6} \times 10^4}$$

$= 177$ m

e. $\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh - qE_0 h$

$= \frac{1}{2} m v^2$

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{2qE_0}{m} h}$

$= \sqrt{3^2 + 2 \times 9{,}8 \times 200 - 2 \times \frac{0{,}2.10^{-6} \times 10^4}{0{,}4.10^{-3}} \times 200}$

$= 44 \text{ m.s}^{-1}$

En l'absence de E_0

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 63 \text{ m.s}^{-1}$

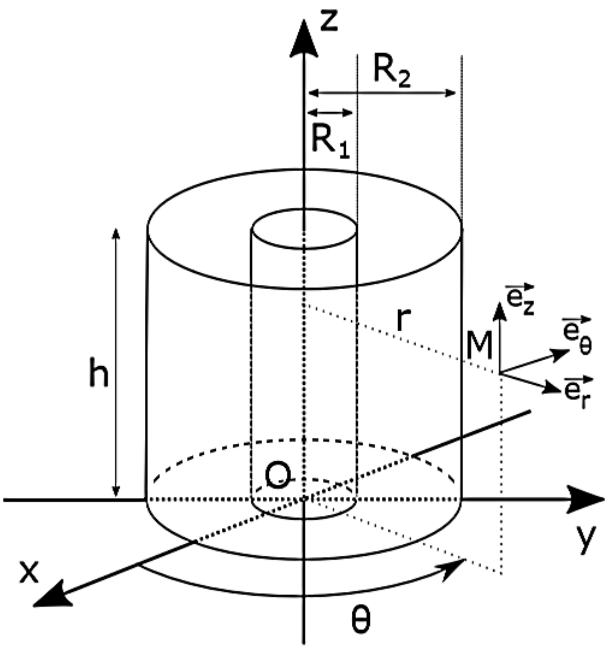
Logique : le sol ⊕ repousse la goutte ⊕

En l'absence de vitesse initiale
de E_0

$v = \sqrt{2gh} = 63 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice 16

On étudie un condensateur cylindrique : l'armature intérieure porte la charge positive Q (répartie uniformément sur sa surface) et est soumise au potentiel V_1, l'armature extérieure porte la charge négative $-Q$ (répartie uniformément sur sa surface) et est soumise au potentiel V_2.



1) En étudiant les symétries et invariances de la distribution de charges, et en précisant les hypothèses prises en compte, montrer que l'on peut écrire le champ électrostatique en tout point M de l'espace de la manière suivante :

$$\overrightarrow{E(M)} = E(r).\overrightarrow{e_r}$$

2) Etablir, pour tout point de l'espace, l'expression du champ électrostatique (on distinguera 3 cas), en fonction de Q, h, r et ε_0.

3) Etablir l'expression du potentiel en tout point M situé entre les 2 armatures.

4) Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur, en fonction de R_1, R_2, h et ε_0.

5) Retrouver une expression équivalente à celle du condensateur plan, dans le cas où la distance e entre les armatures vérifie : $e << R_1$.

1) On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z), dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$.

Le champ électrique s'écrit donc :

$$\overrightarrow{E}(r,\theta,z) = \left| \begin{array}{l} E_r(r,\theta,z) \\ E_\theta(r,\theta,z) \\ E_z(r,\theta,z) \end{array} \right.$$

• **Étude des invariances :**

- La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{e_z}$.
- La distribution de charge est invariante par rotation d'angle θ et d'axe $(O,\overrightarrow{e_z})$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{E}(r,\theta,z) = \overrightarrow{E}(r)$$

• **Étude des symétries :**

- Le plan $(M,\overrightarrow{e_r}),\overrightarrow{e_\theta}$ est plan de symétrie de la distribution de charge $\Rightarrow E_z = 0$
- Le plan $(M,\overrightarrow{e_r}),\overrightarrow{e_z}$ est plan de symétrie de la distribution de charge $\Rightarrow E_\theta = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r}$$

• **Finalement :**

$$\boxed{\overrightarrow{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\ \overrightarrow{e_r} = E(r)\ \overrightarrow{e_r}}$$

2) On choisit comme surface de Gauss (S_G) un cylindre d'axe $(O,\overrightarrow{e_z})$, de rayon r et de hauteur h.

On a donc $(S_G) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_{lat})$, avec :

- $\overrightarrow{dS_1} = r\ dr\ d\theta\ \overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{dS_2} = r\ dr\ d\theta\ (-\overrightarrow{e_z})$
- $\overrightarrow{dS_{lat}} = r\ d\theta\ dz\ \overrightarrow{e_r}$

• **Calcul du flux de $\overrightarrow{E}$ à travers (S_G) :**

$$\Phi = \iint_{M\in(S_G)} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS}(M) = \iint_{M\in(S_1)} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS_1}(M) + \iint_{M\in(S_2)} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS_2}(M) + \iint_{M\in(S_{lat})} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS_{lat}}(M)$$

Comme $\overrightarrow{E}$ est orthogonal à $\overrightarrow{dS_1}$ et $\overrightarrow{dS_2}$, les deux premières intégrales ont nulles et :

$$\Phi = \iint_{M\in(S_{lat})} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS_{lat}}(M) = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi} E(r)r\; d\theta\; dz = E(r)2\pi rh$$

• **Théorème de Gauss :**

On distingue 3 cas selon la valeur de r :

Cas 1 : $r < R_1$: $Q_{int} = 0$.

Donc : $\Phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(r)2\pi rh = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(r) = 0$

Cas 2 : $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q_1 = Q$.

Donc : $\Phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(r)2\pi rh = \dfrac{Q}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(r) = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0 h}\dfrac{1}{r}$

Cas 3 : $r > R_2$: $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = Q - Q = 0$.

Donc : $\Phi = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(r)2\pi rh = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(r) = 0$

• **Finalement :**

$$\overrightarrow{E}(r,\theta,z) = E(r)\overrightarrow{e_r} \text{ avec : } \boxed{E(r) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\dfrac{1}{r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.}$$

3) Calcul de potentiel inter-armatures :

Soit $M_1(R_1,\theta,z)$ un point appartenant à l'armature interne et $M(r,\theta,z)$ un point entre les deux armatures.

$$V(M) - V(M_1) = -\int_{M_1}^{M} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{R_1}^{r} E(r')dr' = -\int_{R_1}^{r} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 hr'}dr' = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

Et comme $V(M_1) = V_1$: $\boxed{V(M) = V(r) = V_1 - \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\dfrac{r}{R_1}\right)}$

4) Calcul de la capacité :

On sait que : $Q = CU$ où $U = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

De plus $V_2 = V(R_2)$ donc $V_1 - V_2 = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$ d'après la question précédente.

On obtient donc : $\boxed{C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2} = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}}$

5) $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_1 + e}{R_1} = 1 + \dfrac{e}{R_1}$ avec $\dfrac{e}{R_1} << 1$.

Donc : $\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{e}{R_1}\right) \approx \dfrac{e}{R_1}$ (développement limité à l'ordre 1 en $\dfrac{e}{R_1}$)

Donc : $\boxed{C = \epsilon_0\dfrac{2\pi R_1 h}{e}}$

• **Commentaire :**

On retrouve une expression similaire à celle du condensateur plan : $C = \epsilon_0\dfrac{S}{d}$ avec $d = e$ l'espace inter-armature et $S = 2\pi R_1 h$ la surface des armatures.