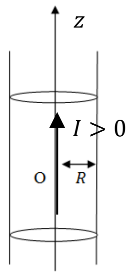
EM2 CONDUCTION ELECTRIQUE

Travaux Dirigés

Exercice 1 : Distributions de courant volumiques



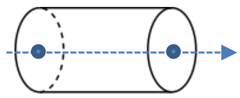
1) Un conducteur cylindrique infini de rayon R parcouru par une densité volumique de courant axial et uniforme tel que $\vec{j} = j\overrightarrow{e_z}$ est modélisé par un fil parcouru par un courant d'intensité I. Exprimer l'intensité I en fonction de la densité volumique de courant $\vec{j}$.
2) Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Exprimer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ en un point M de rayon r en fonction de I et a.
3) Considérons un courant stationnaire et uniforme d'intensité I parcourant de façon radiale un conducteur à symétrie cylindrique de hauteur h et de rayon r. Exprimer la densité de courant volumique $\vec{j}$ en fonction des caractéristiques du problème.

Exercice 2 : Distributions de courant surfaciques

1) Soit un câble, modélisé par un cylindre de rayon R parcouru par un courant de densité surfacique axiale et uniforme $\overrightarrow{j_s}$. Calculer l'intensité I traversant le fil en fonction de j_s.

2) Soit une nappe plane de courants de largeur L suivant (Ox), infinie dans la direction (Oy), perpendiculaire à Oz, parcourue par une densité surfacique de courants $\overrightarrow{j_s} = j_s\overrightarrow{u_y}$ uniforme. Calculer l'intensité I traversant la nappe en fonction de js.

Exercice 3 : Loi d'Ohm et résistance d'un conducteur



Un conducteur cylindrique de conductivité γ, de longueur L et de section S, d'axe (Ox) de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, est placé dans un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à son axe. Le courant créé est supposé uniforme sur une section du conducteur.

Établir le lien entre forme locale et forme intégrale de la loi d'Ohm en précisant bien les notations.

En déduire la valeur de la résistance du conducteur en fonction des caractéristiques du conducteur.

Exercice 4 : Mouvement de porteurs

Un fil de cuivre de section $s = 2{,}5\ mm^2$ est parcouru par un courant d'intensité $I = 10\ A$.

a. Combien d'électrons vont traverser une section de ce fil pendant une seconde ?

b. Évaluer la densité volumique n d'électrons libres en admettant que chaque atome de cuivre libère en moyenne un électron.

c. En déduire la longueur L de fil dans laquelle se trouvent les électrons qui traversent la section en une seconde.

Données :

La charge de l'électron est supposée connue.
Masse molaire du cuivre : $M = 63{,}5\ g.mol^{-1}$; masse volumique du cuivre : $\mu = 8{,}96.10^3\ kg.m^{-3}$;
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$.

Exercice 5 : Modèle de Drude

1) Rappeler la loi d'ohm locale : on précisera la signification de chacun des termes ainsi que leur unité.

Un modèle simpliste microscopique du phénomène consiste à admettre que :

- des charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$;
- Lors de ce mouvement elles heurtent des charges fixes (ions du réseau métallique) : l'action de ces chocs est équivalente à une force de type frottement fluide notée $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où τ est une constante positive dite temps de relaxation et $\vec{v}$ la vitesse du porteur de charge.
- La relation fondamentale de la dynamique s'applique ici, en négligeant toute autre force

2) Ecrire la relation liant $m, \vec{a}, q, \vec{E}, \vec{v}, \tau$ ... (équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$).
3) Montrer que le porteur de charge va atteindre une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$, qui s'exprime simplement en fonction de $m, q, \tau, \vec{E}$.

On admet alors que, le champ électrique étant uniforme, tous les porteurs de charge sont animés de la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, et qu'il y a n^* porteurs par unité de volume.

4) Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et montrer que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique. Par définition, le coefficient de proportionnalité correspond à la conductivité du milieu conducteur étudié, et ce résultat constitue la loi d'Ohm locale.
5) En déduire la valeur de la conductivité σ en fonction de n^*, q, τ et m.
6) Application numérique :

- On donne pour le métal cuivre : chaque atome libère un électron ; masse molaire M = 63,5 g/mol ; masse volumique μ = 9 000 kg/m^3 ; conductivité σ = 6.10^7 Ω^{-1}.m^{-1} ;
- Pour le porteur électron : m = 9.10^{-31} kg ; q = - 1,6.10^{-19} C ; constante d'Avogadro : N_A = 6,023.10^{23} mol^{-1}.

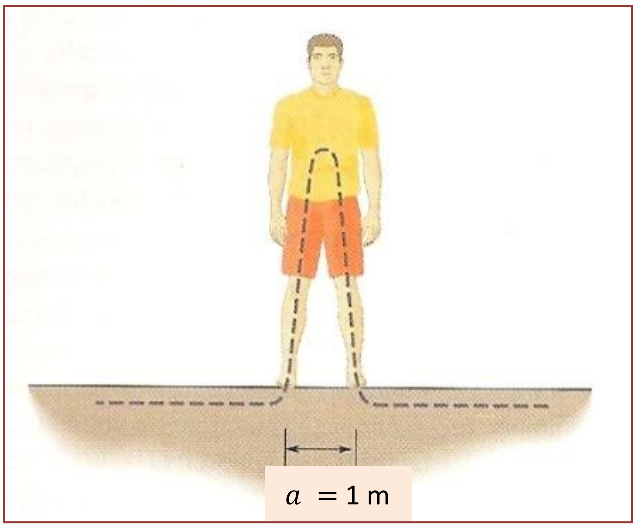
Calculer τ ; commenter la valeur numérique obtenue.

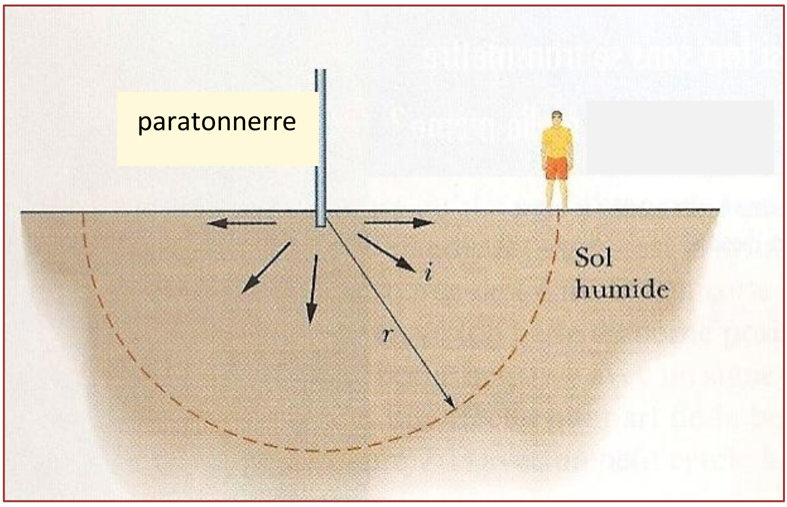
Exercice 6 : Prise de Terre

Une prise de terre est constituée d'une demi-boule de centre O et de rayon a, enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace $z < 0$, conducteur de conductivité $\sigma = 10^{-2}\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$. Elle est destinée à recevoir un courant d'intensité I =5.10^4 A en provenance d'un paratonnerre (cf. ci-dessous). Dans le sol, on suppose que la densité de courants est de la forme $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques.

1) On suppose les courants stationnaires pour simplifier le problème. En déduire que $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$.
2) Exprimer le champ électrique dans le sol et en déduire que son potentiel vaut $V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$.

3) A quelle distance minimale D_m de la prise de terre dans le plan $z = 0$ un homme doit-il être pour être certain que son corps soit traversé par un courant inférieur à $I_{max} = 25$ mA ? La résistance du corps humain entre ses deux pieds, distants de $a = 1$ m, est $R \approx 2{,}5$ kΩ.





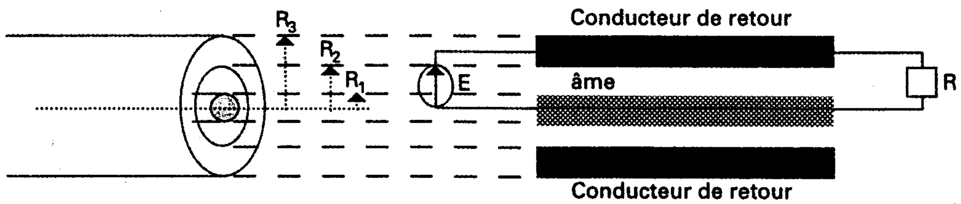
Exercice 7 : Modèle de Drude de la conductivité

Retrouver à partir de la loi d'Ohm locale l'expression de la résistance d'un tronçon de conducteur cylindrique et homogène, de longueur L et de section S.

Calculer alors la résistance, dite linéique (c'est à dire pour un mètre de longueur de câble), d'un câble coaxial (type câble de télévision) en cuivre avec :

- le rayon du conducteur central ou âme : R_1 = 0,58 mm ;
- les rayons du conducteur extérieur de retour : R_2 = 10 mm et R_3 = 10,5 mm ;

Les liaisons entre un générateur et un récepteur par l'intermédiaire du coaxial se faisant selon le schéma de la figure ci-dessous.



Exercice 8 : Approche locale de l'effet Joule

On considère un milieu conducteur comportant une densité volumique n d'électrons libres, placé dans un champ électrique $\vec{E}$.

1) Exprimer la puissance de la force subie par un électron libre, de vitesse $\vec{v}_e$.
2) Exprimer la puissance reçue par un volume élémentaire dτ en fonction de $\vec{v}$, vitesse moyenne des électrons libres. Montrer qu'elle peut s'exprimer par $d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}\ \mathrm{d}\tau$, $\vec{j}$ désignant le vecteur densité de courant.

$\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ représente donc la puissance volumique dissipée dans un matériau par effet Joule.

Le champ électrique va donc fournir de l'énergie aux porteurs de charge mobile (ici, les électrons libres).

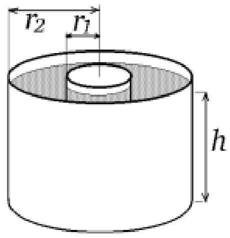
L'énergie cinétique acquise par les porteurs de charges sous l'action de la force électrique est entièrement restituée en régime stationnaire lors des chocs avec le matériau sous forme de chaleur.

Il y a disparition d'énergie électrique, qui est convertie en énergie thermique.

Exercice 9 : Résistance d'une colonne cylindrique d'électrolyte

Deux électrodes cylindriques coaxiales de rayons respectifs r_1 et r_2 plongent sur une hauteur h dans un électrolyte de conductivité uniforme σ ; le fond est isolant.

Une différence de potentiel $V_1 - V_2$ positive est imposée entre les deux électrodes. Il en résulte un champ électrique et un courant électrique entre ces électrodes.



On admettra que $\vec{j} = j_r(r)\,\vec{e}_r$ (système de coordonnées cylindriques) dans l'électrolyte.

1) Exprimer $j_r(r)$ en fonction de I, r et h, avec r rayon compris entre r_1 et r_2
2) En déduire l'expression du champ électrique et exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les électrodes en fonction de σ, I, r_1, r_2 et h.
3) En déduire la résistance de l'électrolyte. Contrôler l'homogénéité.